

**PREMIERE** **TRACONNES**



***APRENDE FÍSICA EN EL  
PARQUE DE ATRACCIONES***



**Comunidad de Madrid**

CONSEJERIA DE EDUCACION

Dirección General de Ordenación Académica







# Aprende Física en el Parque de Atracciones

**José Antonio Martínez Pons**

**Fernando Ignacio de Prada Pérez de Azpeitia**



**Comunidad de Madrid**

CONSEJERIA DE EDUCACION

Dirección General de Ordenación Académica



**Biblioteca Virtual**

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN  
**Comunidad de Madrid**

Esta versión digital de la obra impresa forma parte de la Biblioteca Virtual de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid y las condiciones de su distribución y difusión de encuentran amparadas por el marco legal de la misma.

[www.madrid.org/edupubli](http://www.madrid.org/edupubli)

[edupubli@madrid.org](mailto:edupubli@madrid.org)

**Coordinación técnica: Carmen Galán y Eva Jiménez**

**COLECCIÓN: MATERIALES CURRICULARES. nº 15**

**© Consejería de Educación. Dirección General de Ordenación Académica**

**Madrid, 2001**

Tirada: 2.000 ejemplares  
Edición: 10/2001  
I.S.B.N.: 84-451-2130-8  
Depósito legal: M-46.618-2001  
Imprime: **B.O.C.M.**

A NUESTROS PADRES, A NUESTROS HIJOS:

*Cantemos la promesa,  
quizá tan sólo un niño,  
unos ojos me miran hacia el mundo asombrados,  
mas no interrogan; claros, sin reservas, admiran.  
¡Por ellos combatimos y a veces somos duros!  
¡Bastaría que un niño cualquiera así aprobara  
para justificarnos!*

GABRIEL CELAYA



# ÍNDICE

|  | Págs. |
|--|-------|
| <b>PRESENTACIÓN</b> .....                                    | 9     |
| <b>INTRODUCCIÓN</b> .....                                    | 11    |
| <b>PRIMERA PARTE: GUÍA PEDAGÓGICA</b> .....                  | 13    |
| <b>1. JUSTIFICACIÓN</b> .....                                | 15    |
| <b>2. OBJETIVOS</b> .....                                    | 16    |
| 2.1. Objetivos específicos del proyecto .....                | 16    |
| 2.2. Objetivos didácticos .....                              | 16    |
| 2.3. Objetivos relacionados con el currículo .....           | 17    |
| <b>3. CONTENIDOS</b> .....                                   | 18    |
| 3.1. Contenidos conceptuales .....                           | 18    |
| 3.2. Contenidos procedimentales .....                        | 19    |
| 3.3. Contenidos actitudinales .....                          | 19    |
| <b>4. TEMPORALIZACIÓN</b> .....                              | 20    |
| <b>5. ACTIVIDADES: SECUENCIACIÓN Y DESARROLLO</b> .....      | 20    |
| 5.1. Semana preparatoria de la actividad .....               | 20    |
| 5.2. Día de la actividad: sesión de la experimentación ..... | 21    |
| 5.3. Semana siguiente a la visita .....                      | 21    |
| <b>6. EVALUACIÓN</b> .....                                   | 22    |
| 6.1. Criterios de evaluación .....                           | 22    |
| 6.2. Procesos de evaluación .....                            | 22    |
| <b>SEGUNDA PARTE: CUADERNO DE ACTIVIDADES</b> .....          | 25    |
| <b>1. INTRODUCCIÓN</b> .....                                 | 27    |
| <b>2. TÉCNICAS PARA RESOLVER LOS EJERCICIOS</b> .....        | 27    |
| <b>3. ATRACCIONES MECÁNICAS</b> .....                        | 30    |
| 3.1. La Noria .....  | 30    |
| 3.2. El Tiovivo .....  | 32    |
| 3.3. Los Coches de Choque .....                              | 34    |

|  |            |
|--|------------|
| 3.4. Siete Picos .....   | 36         |
| 3.5. Los Rápidos .....   | 38         |
| 3.6. La Lanzadera .....  | 40         |
| 3.7. Los Fiordos .....   | 42         |
| 3.8. El Tornado .....  | 44         |
| 3.9. El Barco Pirata .....   | 46         |
| 3.10. Las Sillas Voladoras .....   | 48         |
| <b>4. EVALUACIÓN .....</b>   | <b>50</b>  |
| 4.1. Evaluación tipo prueba objetiva .....   | 50         |
| 4.2. Ejercicios para evaluar .....   | 51         |
| <b>TERCERA PARTE: FUNDAMENTO TEÓRICO Y DESARROLLO<br/>DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS .....</b> | <b>55</b>  |
| <b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>   | <b>57</b>  |
| <b>2. ATRACCIONES MECÁNICAS .....</b>  | <b>57</b>  |
| 2.1. La Noria .....  | 57         |
| 2.2. El Tiovivo .....  | 61         |
| 2.3. Los Coches de Choque .....  | 65         |
| 2.4. Siete Picos .....   | 68         |
| 2.5. Los Rápidos .....   | 71         |
| 2.6. La Lanzadera .....  | 77         |
| 2.7. Los Fiordos .....   | 83         |
| 2.8. El Tornado .....  | 88         |
| 2.9. El Barco Pirata .....   | 93         |
| 2.10. Las Sillas Voladoras .....   | 99         |
| 2.11. El Escorpión .....   | 102        |
| <b>ANEXOS .....</b>  | <b>107</b> |
| 1. Aparato para estimar las dimensiones de una atracción .....                             | 109        |
| 2. Aparato para estimar la fuerza centrífuga .....   | 111        |
| <b>Normas generales para la aplicación de la hoja Excel .....</b>                          | <b>115</b> |
| 1. Ideas generales sobre la hoja de cálculo y su utilización .....                         | 115        |
| 2. Aplicación en este trabajo .....  | 117        |
| <b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>  | <b>119</b> |

## PRESENTACIÓN

La Consejería de Educación convoca todos los años el Certamen de Materiales Curriculares. Su finalidad es fomentar los procesos de investigación que generan materiales didácticos y sirven de soporte, mediante su difusión, a los currículos de los centros educativos y a la mejora de la práctica docente.

Con estos premios queremos reconocer la labor y el buen hacer que realizan los profesores y contribuir a que la sociedad sea cada vez más consciente del valor fundamental de su tarea.

El libro que presentamos, *Aprendemos Física en el Parque de Atracciones*, recibió una mención en el Octavo Certamen. El aspecto más relevante del trabajo es que utiliza el Parque de Atracciones como un excitante laboratorio de Física, sin que ello signifique primar los aspectos lúdicos en el aprendizaje, como se pudiera pensar por el título, todo lo contrario, el principal interés de la obra reside en el rigor metodológico y científico con el que se presenta.

Su objetivo es que los alumnos de secundaria puedan entender mejor, de forma atractiva y con mayor profundidad, los principios fundamentales de la Física, al mismo tiempo que se estimula y desarrolla su interés y motivación por el conocimiento de los saberes científicos, fundamentales para la comprensión del mundo, sobre todo en nuestra compleja sociedad del conocimiento y de la tecnología.

Es nuestro deseo que esta publicación sea útil al profesorado y le anime a la investigación de nuevos métodos y materiales que enriquezcan su ejercicio profesional y faciliten su trabajo en el aula.

**Carlos Mayor Oreja**  
Consejero de Educación



## INTRODUCCIÓN

**E**n los últimos años, los parques temáticos y de atracciones han experimentado un gran auge como recurso de ocio en todas las partes del mundo. Durante la visita al Parque de Atracciones de Madrid, pensamos que bien podía ser aprovechado didácticamente por todos los estudiantes de Educación Secundaria y de Bachillerato de la Comunidad de Madrid, al utilizarse como un interesante y excitante laboratorio de Física, donde los estudiantes tomaran medidas, realizaran estimaciones de magnitudes, respondieran cuestiones relacionadas con conceptos físicos explicados en clase y resolvieran problemas relacionados con las atracciones. Todo ello de una forma más atractiva, emocionante y motivante que en el habitual Instituto.

El material que se presenta es un documento pedagógico al servicio de profesores y alumnos, que sirve para preparar, realizar y sacar el máximo provecho didáctico-científico a una visita al Parque de Atracciones.

El material didáctico se ha estructurado en tres partes:

### A. Guía pedagógica

Documento para el profesor, que incluye el desarrollo curricular del proyecto (contenidos, objetivos, evaluación, etc.).

### B. Cuaderno de actividades

Es un cuaderno de trabajo para el alumnado, formado por diez unidades didácticas correspondientes a sendas atracciones mecánicas. Con el fin de fijar la atención en el aspecto científico, cada unidad consta de una breve descripción de la atracción, acompañada de una ilustración, unos conceptos previos, un resumen de contenidos conceptuales, unos datos técnicos, unas estimaciones y medidas que han de realizar los participantes, unos cálculos que se han de efectuar a partir de los datos y estimaciones y, por último, unas cuestiones y observaciones.

Todas las situaciones propuestas fomentan el diálogo, la comunicación y la confrontación de ideas con los demás, creando un contexto interactivo que favorece el desarrollo de una percepción positiva de la Ciencia y contribuye a la superación de dificultades que aparecen con frecuencia al acercarse a la Física.

### **C. Fundamento teórico y desarrollo de las unidades didácticas**

Se expone la relación de las atracciones seleccionadas y se describe mecánicamente el funcionamiento de cada una, explicando el fundamento científico en que se basan. Esta información está destinada a ser adaptada por cada profesor al nivel que imparte en su clase y a la etapa seleccionada. Además, en la mayoría de atracciones se incluye una simulación informática realizada en hoja de cálculo.

# PRIMERA PARTE

## Guía Pedagógica





# 1. JUSTIFICACIÓN

Una de las principales razones de utilizar el Parque de Atracciones de Madrid como recurso didáctico, es que la física de las atracciones mecánicas es suficientemente sencilla para ser entendida a un nivel de iniciación. Además, la actividad es enormemente motivadora y divertida, tanto para los estudiantes, que experimentan por sí mismos el movimiento, sus efectos y aprenden a aplicar sus conocimientos de Física y Matemáticas a problemas reales, como para profesores, a los que proporciona una nueva perspectiva didáctica y aporta nuevos recursos pedagógicos.

Numerosos estudiantes de todo el mundo se enfrentan en los exámenes a problemas inspirados en las ingeniosas máquinas de un parque de atracciones. Esto demuestra que un espacio de este tipo puede ofrecer numerosas sugerencias científicas. En un parque de atracciones la gente se divierte cuando experimenta sensaciones fuertes; para ofrecérselo, se recurre al método de imprimir aceleraciones violentas al cuerpo. Los órganos de equilibrio, situados en el oído, y los provistos de una inercia considerable, como el estómago y el cerebro, son muy sensibles a estas aceleraciones.

Esta experiencia didáctica refuerza lo que los estudiantes aprenden en clase, hace que surjan nuevas preguntas, contrarresta el mito de que la Física es abstracta y solo accesible a los más brillantes y, lo mejor de todo, combina actividades intelectuales y lúdicas.

La física del parque de atracciones es sencilla, real y divertida. Los participantes disfrutan del proyecto y esto les anima a continuar sus estudios en Física, Matemáticas, Ingeniería, etc.

Los parques de atracciones han sido utilizados como recurso para la enseñanza de la Física desde mediados del siglo XX, si bien la primera publicación la realizó John Roeder's en 1975, en la revista científica "The physics teacher". En la última década, miles de estudiantes americanos han experimentado el proyecto "Un día de física en el parque de atracciones", siendo esta una actividad que difícilmente olvidarán, donde aprenden y sienten la Física en primera persona en una situación real y divertida.

La experiencia ha demostrado que los estudiantes implicados entienden mejor y con mayor profundidad los principios fundamentales de la Física y desarrollan un mayor interés y motivación hacia la Ciencia en general y hacia la Física en particular.

Al profundizar en los conocimientos científicos necesarios para comprender el mundo que les rodea, adquieren una actitud fundamentada, analítica y crítica, ayudándoles a reflexionar sobre el papel de la Ciencia y de la Tecnología en el desarrollo de la sociedad.

Por todas estas razones, y teniendo en cuenta que no hay actualmente nada publicado al respecto en castellano, decidimos que sería muy interesante realizar este material y darlo a conocer a todos los profesores interesados en una nueva perspectiva en la didáctica de la Física.

## 2. OBJETIVOS

### 2.1. Objetivos específicos del proyecto

Además de los objetivos didácticos que se citan más adelante, el principal objetivo es mejorar la calidad de la enseñanza de la Física en la Enseñanza Secundaria. Los objetivos específicos que se pretenden con estos materiales son:

1. Facilitar y mejorar la comprensión de la Física en el curriculum de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato, mediante actividades que motiven y atraigan al alumnado.
2. Proporcionar al profesorado una nueva perspectiva didáctica, con la aportación de nuevos recursos, basados en actividades recreativas y experiencias relacionadas con la Ciencia.
3. Proporcionar a los estudiantes la oportunidad y la experiencia de resolver problemas de la vida real utilizando sus conocimientos adquiridos de Física, todo ello de una forma amena y divertida.
4. Comprender que la Ciencia forma parte de su entorno y vida cotidiana, siendo necesaria para entender todos los fenómenos que nos rodean.
5. Presentar y proponer una actividad extraescolar inédita e innovadora para los centros educativos de la Comunidad de Madrid, relacionada con la didáctica científica, pudiéndose llevar a cabo no sólo por los departamentos de Física y Química, sino también por otros departamentos relacionados, como pueden ser los de Tecnología, Matemáticas, Ciencias de la Naturaleza, que comparten espacio epistemológico.
6. Estimular el interés del alumnado por los temas científicos y animarles a continuar sus estudios en el Bachillerato Científico y en estudios universitarios relacionados con las ciencias.
7. Mejorar los resultados obtenidos en la asignatura de Física y Química en la Enseñanza Secundaria y en el Bachillerato, al estimular su interés y motivación frente a esta materia.

### 2.2. Objetivos didácticos

Los objetivos que se pretenden como consecuencia de la interacción educativa que se ha planificado intencionadamente, tienen como finalidad el desarrollo de las capacidades a las que se refiere la Ley Orgánica de Educación 1/1990 de 30 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo.

1. Controlar las variables e identificar los factores que intervienen en los fenómenos físicos que tienen lugar en las atracciones mecánicas.

2. Reconocer los límites de precisión en las estimaciones, medidas, toma de datos y discutir la incertidumbre.
3. Registrar de forma ordenada y precisa, datos cuantitativos y cualitativos obtenidos en la observación directa y experimental, como parte fundamental del método científico.
4. Utilizar el lenguaje científico para responder a cuestiones relacionadas con la Cinemática y con la Dinámica y extraer conclusiones propias a partir de conocimientos previos.
5. Resolver problemas prácticos de mecánica relacionados con situaciones reales y vividas en primera persona.
6. Comprender conceptos y principios fundamentales de una parte esencial de la Física como es la Mecánica clásica.
7. Reflexionar y reconocer las aportaciones de la Ciencia para la mejora de la calidad de vida de los seres humanos, incluso en aspectos relacionados con el ocio y la diversión.
8. Utilizar sus conocimientos científicos para comprender el funcionamiento de las atracciones mecánicas disponibles en un parque de ocio y disfrutar de ellas con conocimiento de causa.

### **2.3. Objetivos relacionados con el currículo**

Al principio puede parecer que un parque de atracciones es un lugar poco adecuado para realizar un trabajo serio de Física; más idóneo para la diversión y el entretenimiento que para la reflexión. Pero analizando más detalladamente la física de las atracciones, vemos que pueden utilizarse didácticamente para desarrollar un curso de Física elemental, tanto en Secundaria como en Bachillerato, donde aprenden, aplican y calculan magnitudes y conceptos tales como movimiento, velocidad, aceleración, fuerza, trabajo, potencia, energía, etc., y se aplican principios fundamentales como las leyes de Newton, la ley de conservación de la cantidad de movimiento, la ley de conservación de la energía, etc.

En el segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, y en concreto en 4º curso, el proyecto está relacionado con las siguientes unidades didácticas del temario oficial:

1. El movimiento.
2. Las fuerzas.
3. Fuerzas gravitatorias.
4. Energía y trabajo.
5. El calor.

En Bachillerato, y en concreto en su primer curso, se trabajan las unidades didácticas:

1. Aproximación al trabajo científico.
2. Ciencia, Tecnología y Sociedad.
3. Cinemática.
4. Dinámica.
5. La energía y sus transferencias.

## 3. CONTENIDOS

### 3.1. Contenidos conceptuales

El alumnado participante tiene que entender y aplicar los siguientes conceptos y principios:

1. Aproximación al trabajo científico: planteamiento de problemas, desarrollo de experiencias, toma de datos, interpretación de resultados, estimación de la incertidumbre de una medida.
2. Magnitudes físicas: unidades fundamentales y derivadas. Tipos de errores y su cálculo. Notación científica y cifras significativas.
3. Cinemática: movimiento, trayectoria, desplazamiento. Sistema de referencia. Velocidad. Aceleración. Clasificación de movimientos según la trayectoria y la aceleración: movimiento rectilíneo uniforme, movimiento circular uniforme, movimiento uniformemente acelerado. Combinación de movimientos.
4. Dinámica: fuerzas y unidades. Representación vectorial de fuerzas. Cálculo de fuerza resultante. Fuerzas y movimiento. Fuerza de rozamiento. Efectos de las fuerzas. Peso. Leyes de Newton.
5. Trabajo y energía: unidades. La energía y sus transformaciones. Tipos de energía. Potencia y unidades. Rendimiento de una máquina. Principio de Conservación de la energía mecánica. Energías no conservativas. Energía calorífica.
6. Cantidad de movimiento. Impulso. Principio de conservación de la cantidad de movimiento. Teoría de choques elásticos.
7. Ciencia, Tecnología y Sociedad: relaciones de la Ciencia con la Tecnología y las implicaciones en el bienestar social, ocio y condiciones de la vida humana.

### 3.2. Contenidos procedimentales

1. Utilización de técnicas de resolución de ejercicios relativos a los contenidos conceptuales: movimientos, fuerzas, trabajo, potencia, energía, etc.
2. Análisis e interpretación de las diversas transformaciones energéticas que se producen en las diferentes atracciones y en las que se manifiesta la conservación de la energía y su degradación.
3. Análisis e interpretación de las máquinas y aparatos del parque, comparando su consumo y rendimiento.
4. Elaboración de conclusiones y comunicación de resultados mediante la redacción de informes y debates.
5. Análisis y descripción de las variaciones de las fuerzas producidas por las máquinas.
6. Observación, clasificación y análisis del movimiento de las atracciones.
7. Utilización correcta de las unidades de las magnitudes, expresándolas en el sistema internacional.
8. Identificación del problema que se plantea en una experiencia real.
9. Aplicación correcta de fórmulas físicas y del cálculo vectorial.
10. Resolución de ejercicios numéricos con los datos que suministra el enunciado y a partir de sus propias estimaciones.

### 3.3. Contenidos actitudinales

1. Interés en conocer el funcionamiento de máquinas mecánicas.
2. Valoración del conocimiento de la Física para entender el funcionamiento de diversas atracciones mecánicas.
3. Reconocimiento de que el estudio de la Física puede ser ameno y divertido a la vez que práctico.
4. Reconocimiento y valoración del trabajo en equipo a la hora de planificar y realizar el proyecto.
5. Respeto a las normas de seguridad en la utilización de las atracciones.
6. Valoración de la importancia de los hábitos de claridad y orden en la elaboración de informes científicos.
7. Interés en reflexionar sobre normas de seguridad.
8. Interés en encontrar respuestas a cuestiones que se plantean a partir de lo estudiado en clase.

9. Valoración de la importancia de la energía en las actividades cotidianas y su repercusión sobre la calidad de vida y el desarrollo económico.
10. Disposición abierta al planteamiento de interrogantes ante fenómenos que ocurren a nuestro alrededor.

## **4. TEMPORALIZACIÓN**

El tiempo previsto para llevar a cabo el proyecto didáctico oscila entre un mínimo de dos y un recomendable de cuatro unidades lectivas, dependiendo del grado de profundidad que se quiera adoptar. Además hay que añadir el día, medio o entero, en que se realiza la actividad en el Parque de Atracciones.

Se desglosa de la siguiente forma:

- Sesión introductoria y preparatoria: una o dos unidades lectivas.
- Sesión de realización de la actividad: medio día o día entero.
- Sesión correctora y evaluatoria: dos o tres unidades lectivas mínimo.

## **5. ACTIVIDADES: SECUENCIACIÓN Y DESARROLLO**

### **5.1. Semana preparatoria de la actividad**

Es recomendable que previamente a la visita, se dediquen una o dos unidades lectivas, en la que se realicen las siguientes actuaciones:

- Exploración de conceptos previos.
- Reconocimiento y análisis de las atracciones seleccionadas.
- Repaso de las magnitudes fundamentales implicadas en las atracciones y de sus unidades en el sistema internacional, así como de los principios fundamentales, funciones trigonométricas e interpretaciones gráficas.
- Lectura de las normas de obligado cumplimiento referidas a horarios, actividades, seguridad, incidencias, etc.
- Localización en el mapa del parque de todas las atracciones y recorridos, donde se incluyen los puestos de auxilio y los puntos de encuentro con los profesores a horas determinadas.

- Distribución de autorizaciones que han de rellenar los padres o tutores, donde se especifica la actividad que se va a realizar, su duración, las normas y el dinero necesario para el autocar y la entrada. Sería muy conveniente que el centro se hiciese cargo de todos los gastos o, al menos, se subvencionase parte de ellos. Es necesario hacer comprender el carácter "obligatorio" de la actividad extraescolar, que debe aparecer previamente en la programación del departamento como parte del currículo, para que todos los alumnos de los grupos seleccionados realicen la visita y puedan ser calificados y evaluados.

## **5.2. Día de la actividad: sesión de la experimentación**

Es importante aclarar, a todo el alumnado participante, que no es imprescindible ni obligatorio montar en las atracciones; la mayoría de las medidas, estimaciones y actividades pueden realizarse desde tierra.

Cada grupo de alumnos, formado por dos o tres personas, completará el cuaderno de actividades, con el conjunto de sus observaciones, estimaciones, cálculos y respuestas. Todo esto servirá para la evaluación correspondiente.

Las posibles dudas o consultas podrán resolverse preguntándolas a los profesores encargados durante las horas y lugares indicados previamente. Se recomienda un profesor por cada grupo de veinte alumnos.

Cualquier incidencia se comunicará a los profesores, bien en los puntos de encuentro o, en caso de urgencia, a través de la megafonía del parque de atracciones.

Al finalizar la visita, se recogerán todos los cuadernos de actividades para su corrección y evaluación.

## **5.3. Semana siguiente a la visita**

En la semana posterior al desarrollo de la actividad se devuelven los cuadernos corregidos y se realiza el debate del proyecto y los comentarios pertinentes. Se pueden realizar una serie de actividades alternativas de carácter experimental, en clase o en el laboratorio, que aclaren o complementen el trabajo realizado en el parque: caída libre, fuerza centrípeta, etc.

Finalmente se presenta en el cuaderno de actividades una evaluación tipo test, para analizar el grado de comprensión final de conceptos y de esta forma comprobar la consecución de objetivos propuestos, lo que servirá para la evaluación correspondiente.

## 6. EVALUACIÓN

### 6.1. Criterios de evaluación

Se habrán alcanzado los objetivos didácticos propuestos si el alumnado participante es capaz de lograr los apartados que se enumeran a continuación y que deben utilizarse de forma flexible:

1. Aplicar las estrategias propias de la metodología científica a la resolución de problemas relativos a los movimientos descritos por las atracciones mecánicas y sus efectos.
2. Identificar las fuerzas que actúan sobre una persona que viaja en las diferentes atracciones y, en diferentes situaciones, relacionar la dirección y el sentido de la fuerza resultante con el efecto y la sensación física que produce en la persona.
3. Describir y calcular las transferencias de energía que tienen lugar en los montajes mecánicos de las atracciones y en diferentes situaciones, utilizando el principio general de conservación de la energía y, en particular, de la energía mecánica.
4. Aplicar el teorema de conservación del movimiento para explicar los choques y los efectos que se producen.
5. Resolver ejercicios y problemas numéricos sencillos utilizando toda la información que proporciona una atracción mecánica.
6. Utilizar correctamente las unidades del sistema internacional, que deben figurar en todos los cálculos, estimaciones de medidas y resultados de los ejercicios.
7. Representar correctamente en gráficas, esquemas, etc. las relaciones entre las diferentes variables que intervienen en un fenómeno físico.
8. Valorar la progresión en el aprendizaje e interés por la Ciencia.

### 6.2. Procesos de evaluación

Para detectar los conocimientos previos se realiza una evaluación inicial, que permite disponer de un punto de referencia en la evolución del alumno. Dependiendo del trimestre del curso en que se realicen las actividades, y de si ya se han explicado en clase los contenidos implicados, será necesario o no realizar esta evaluación previa.

Para detectar el grado de consecución del aprendizaje, se realiza una evaluación continuada del alumnado a través de la observación sistemática de su trabajo y participación.

Para comprobar el grado en que se han asumido los objetivos propuestos, se utiliza el Cuaderno de actividades del alumnado, así como la prueba tipo test que se incluye en el mismo, lo que nos facilita la evaluación sumativa.

Entre los instrumentos utilizados para la evaluación se podrán incluir:

- Preguntas orales en clase y mientras se realiza la actividad.
- Pruebas escritas en clase.
- Cuaderno de actividades.
- Realización, entrega y exposición de trabajos elaborados de forma individual o conjunta.
- Realización de experiencias sencillas e informes científicos.



# SEGUNDA PARTE

## Cuaderno de Actividades





# 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los parques temáticos y de atracciones han experimentado un gran auge como recurso de ocio en todas las partes del mundo, así que ¿por qué no utilizarlos como recursos didácticos?

La física de las atracciones mecánicas es lo suficientemente sencilla para ser entendida en el ámbito de iniciación, tanto por los estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria como por los de Bachillerato. Al combinar actividades intelectuales y lúdicas, la experiencia resulta enormemente motivadora y divertida, a la vez que difícil de olvidar.

Cada capítulo consta de una breve descripción de la atracción, acompañada de la correspondiente fotografía, datos técnicos facilitados por el fabricante, medidas y estimaciones que se han de tomar, cálculos de magnitudes físicas implicadas y una serie de cuestiones y observaciones para reflexionar sobre determinados procesos físicos. Todo ello de forma directa, amena, y a veces excitante.

Finalmente, se presenta un modelo de evaluación tipo test, que puede realizarse, bien antes de la visita como introducción y exploración de ideas previas o bien posteriormente, que servirá de evaluación para analizar el grado de comprensión de conceptos y de consecución de los objetivos propuestos.

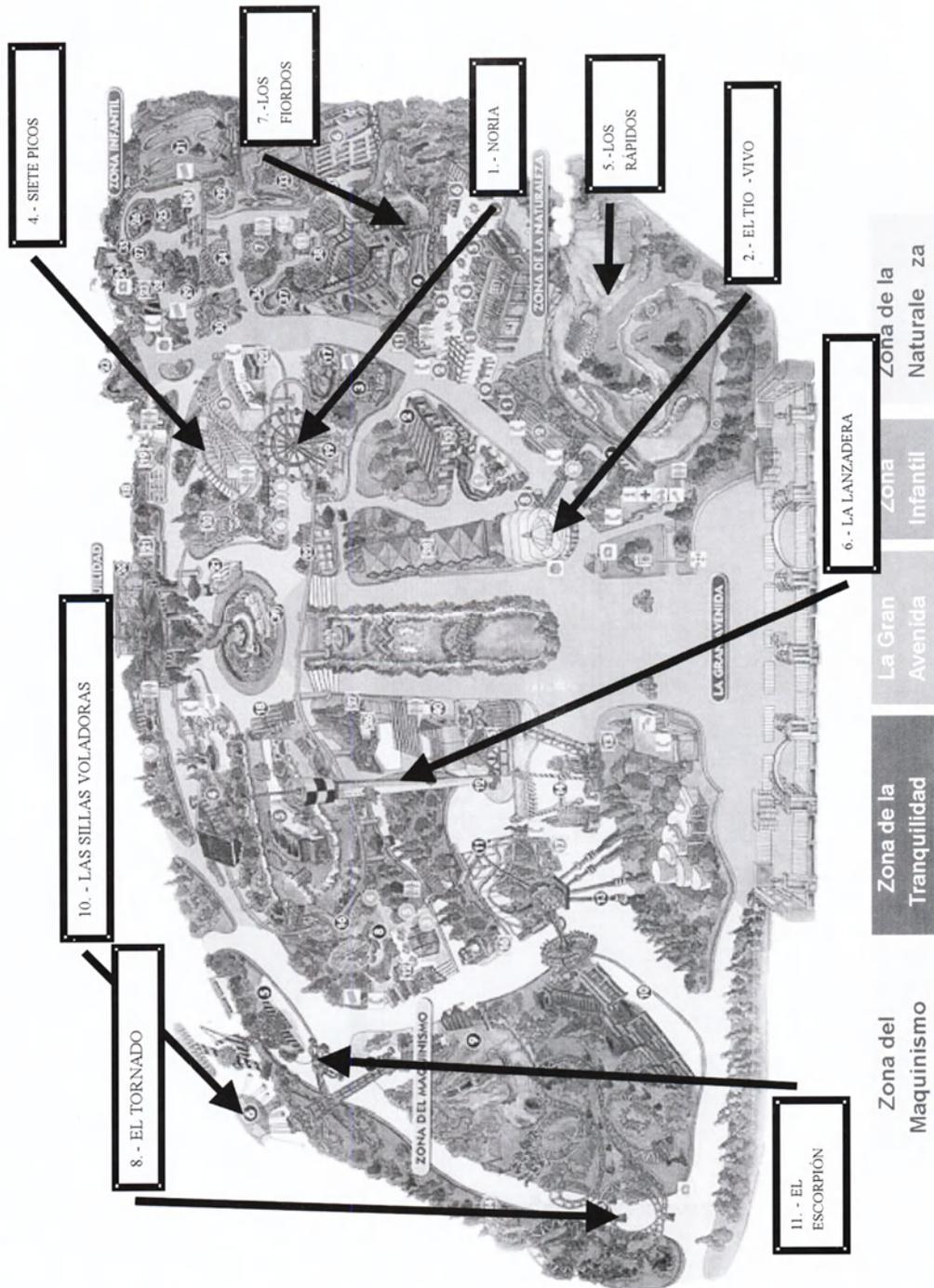
# 2. TÉCNICAS PARA RESOLVER LOS EJERCICIOS

Hay muchos modos de resolver un problema de Física, pero no olvides, que la resolución correcta de un ejercicio no consiste en un conjunto de números y de fórmulas matemáticas sin ninguna conexión entre ellas, por lo que es recomendable acostumbrarse a seguir los siguientes pasos y en el orden en que se indican:

- 1º. Leer con atención el enunciado del problema, hasta estar seguros de que lo hemos entendido bien.
- 2º. Identificar los datos conocidos, asociándolos a la magnitud correspondiente y si es necesario expresarlos en unidades del Sistema Internacional.
- 3º. Identificar la incógnita o magnitud desconocida, asegurándote de que es la magnitud que el problema pide y cuáles son las unidades adecuadas.

- 4°. Realizar un dibujo o diagrama con todos los datos conocidos e incógnitas. Te ayudará a ver más claro las relaciones entre los datos y lo que se pide.
- 5°. Plantear una estrategia, para encontrar la solución, es el punto clave para la resolución del problema, desde lo conocido llegar a lo desconocido.
- 6°. Realizar los cálculos, frecuentemente es un paso directo que consiste en resolver una ecuación de primer grado en la que la incógnita sea la magnitud que hay a calcular. Es muy importante que al sustituir los datos vayan acompañados de sus unidades.
- 7°. Presentar los resultados. Como regla general, las cifras decimales del resultado no deben superar las del dato menor y siempre deben ir seguidas del símbolo de la unidad que le corresponda en el Sistema Internacional.
- 8°. Repasar todo el proceso realizado:
  - ¿Se han copiado todos los datos correctamente?
  - Comprobar las operaciones y las unidades.
  - ¿Se ha encontrado la cantidad pedida?
  - ¿Tiene sentido físico la solución obtenida?, ¿es razonable?

# Mapa del Parque de Atracciones



## 3. ATRACCIONES MECÁNICAS

### La Noria



#### DESCRIPCIÓN

Esta es una de las atracciones que no puede faltar en ninguna feria. Treinta y dos cápsulas se mueven alrededor de una gran rueda que gira verticalmente. No encontrarás emociones fuertes pero sí unas vistas maravillosas.

#### DATOS TÉCNICOS

1. Diámetro: 22 m.
2. Número de cápsulas: 32.
3. Velocidad angular media: 5 r.p.m.
4. Potencia del motor: 60 CV.
5. Masa: 60 toneladas.

#### MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Tiempo que tarda en dar dos vueltas.
2. Altura.
3. Duración del viaje.

## CONOCIMIENTOS PREVIOS

El movimiento circular es el que describe un móvil que siguiendo una trayectoria circular recorre arcos de circunferencia iguales en tiempos iguales. La velocidad es constante en módulo pero no en dirección ni sentido, que cambia continuamente, al ser tangente a la trayectoria y en el sentido del giro. Por esta razón existe aceleración centrípeta o normal dirigida hacia el centro de la circunferencia descrita y, de acuerdo a la segunda ley de Newton, existirá una aceleración centrípeta.

$$a \cdot \text{centrípeta} = v^2/R \quad F = \text{masa} \cdot \text{aceleración}$$

El periodo  $T$  se define como el tiempo que tarda el móvil en recorrer una vuelta completa y la frecuencia es el número de vueltas completas que describe en la unidad de tiempo.

$$T = 1/\text{frecuencia}$$

## CÁLCULOS

1. Velocidad angular (rad/s) (r.p.m.).
2. Velocidad lineal.
3. Aceleración normal.
4. Fuerza centrípeta.
5. Periodo.
6. Frecuencia.

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. ¿Se puede considerar el movimiento como uniforme si se parte del reposo?
2. Una vez iniciado el movimiento, ¿tienen todas las cápsulas la misma velocidad angular?, ¿y la misma velocidad lineal? Razona la respuesta.
3. ¿Hay alguna fuerza que actúa sobre ti al girar en *la Noria*?
4. Compara la fuerza centrípeta con la fuerza que la gravedad ejerce sobre ti.

$$\text{Factor fuerza} = F. \text{Centrípeta} / F. \text{Peso.}$$

5. Tomando como referencia el asiento que tienes frente a ti, ¿existe movimiento?, ¿y si tomas como referencia el centro de la rueda?
6. Si cierras los ojos, ¿puedes adivinar cuándo subes o cuándo bajas?, ¿qué sensaciones experimentas?

# El Tiovivo

## DESCRIPCIÓN

El tradicional carrusel o *Tiovivo* está formado por asientos con forma de animales (caballitos) que a ritmo de trote galopan en un rueda circular. Aunque pensado para los más pequeños, no hay quien se resista a disfrutar de ellos.

## DATOS TÉCNICOS

1. Diámetro: 10 m.
2. Potencia del sistema eléctrico: 60 CV.
3. N° de asientos: 65.
4. Velocidad de rotación: 10 r.p.m.

## MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Tiempo que tarda en dar dos vueltas.
2. Radio.
3. Periodo de rotación.
4. Periodo de oscilación (arriba +abajo).
5. Amplitud de la oscilación.
6. Frecuencia de la oscilación.



## CONCEPTOS PREVIOS

El movimiento oscilatorio es un movimiento periódico en el que la posición del móvil respecto al origen, pasa por un valor máximo y otro mínimo. La trayectoria es semejante a la de una onda, y se caracteriza por las siguientes magnitudes:

- Amplitud es la distancia máxima que puede separarse de la posición de equilibrio.
- Periodo es el tiempo empleado en realizar una oscilación completa (subida + bajada).
- Frecuencia es el número de oscilaciones completas en un segundo.

## CÁLCULOS

1. Calcula la longitud de la circunferencia de la pista.
2. ¿Cuál es el radio de giro?
3. Calcula la velocidad *angular* de los caballitos exteriores y de los interiores.
4. Calcula la velocidad *lineal* de los caballitos exteriores e interiores.
5. Existe aceleración ¿de qué tipo?, ¿qué valor tiene?
6. Calcula la fuerza centrípeta.

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. ¿Se puede considerar el movimiento uniforme si se parte del reposo?
2. Una vez que se ha iniciado el movimiento, ¿qué tipo de movimiento realiza?
3. ¿Se eleva el suelo de la plataforma?, ¿entonces por qué lo hacen los caballitos?
4. Una vez iniciado el movimiento, ¿tienen todos los caballitos la misma velocidad angular?, ¿y la misma velocidad lineal?
5. ¿Hay alguna fuerza que actúa sobre ti al girar en el *Tiovivo*?
6. Compara la fuerza centrípeta con la fuerza que la gravedad ejerce sobre ti.  
$$\text{Factor fuerza} = F. \text{Centrípeta} / F. \text{Peso.}$$
7. Tomando como referencia el asiento que tienes frente a ti, ¿existe movimiento?, ¿y si tomas como referencia el centro de la rueda?

## Los Coches de Choque



### DESCRIPCIÓN

Sobre una pista de 2.000 metros cuadrados, disfruta de la conducción de estos coches sin tener ningún reparo en chocar contra el resto; eso sí, no olvides ponerte el cinturón de seguridad. Estos coches te ofrecen la oportunidad de experimentar personalmente, pero sin daños, los efectos de los choques sin elasticidad, conservándose la cantidad de movimiento y la energía cinética.

### DATOS TÉCNICOS

1. Superficie de la pista: 1.000 m<sup>2</sup>.
2. Número de coches: 25.
3. Potencia del sistema eléctrico: 20 kW.
4. Duración del viaje: 3 minutos.
5. Masa del coche: 200 kg.

### MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Largo de la pista.
2. Ancho de la pista.
3. Tiempo en recorrer un largo de pista.
4. Tiempo en recorrer una vuelta a la pista.

## CONCEPTOS PREVIOS

Cuando dos cuerpos interactúan, las fuerzas que ejercen el uno sobre el otro tienen idéntico valor, pero dirección y sentido opuesto.

Por el principio de acción y reacción en el momento del choque las fuerzas que actúan sobre cada uno son iguales y de signo contrario.

La cantidad de movimiento o momento lineal se calcula multiplicando la masa por la velocidad. Es una magnitud vectorial de la misma dirección y sentido que la velocidad.

Si sobre un cuerpo no se ejerce ninguna fuerza exterior o su resultante es nula, su momento lineal permanece constante: principio de conservación de la cantidad de movimiento.

Si consideramos los coches como un sistema aislado, la suma de las fuerzas sobre el sistema es cero, por lo que la cantidad de movimiento se conserva constante.

$$F_{12} + F_{21} = 0 \quad F_{total} = 0, \quad P = constante = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Cuando en el choque no se produce deformación, la energía cinética del sistema se conserva: choque elástico.

## CÁLCULOS

1. Calcula la velocidad media al recorrer un largo y al completar una vuelta a la pista.
2. ¿Cuál es el peso total del coche cuando vas conduciendo?
3. Calcula la energía cinética que puede adquirir el vehículo.
4. Deduce la cantidad de movimiento a partir de la velocidad media.
5. Suponiendo que las masas de ambos coches son iguales y chocan con una velocidad de 5m/s con otro coche que circula a 5m/s en tu misma dirección y sentido contrario, ¿qué ocurrirá con tu coche? Dibuja un diagrama de todas las magnitudes vectoriales que intervienen.
6. Repite el ejercicio anterior suponiendo un choque perpendicular entre ambos coches.

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. Explica cuál es la función de los cinturones de seguridad.
2. ¿Qué diferencias observas al chocar contra otro coche o contra el bordillo de la pista?
3. ¿Cómo se frenan los coches?
4. Escribe ejemplos que ilustren las leyes de Newton a partir de lo que ocurre en la pista.
5. Si chocas de frente contra otro coche que está parado, ¿qué ocurre?

## Siete Picos



### DESCRIPCIÓN

En la clásica *Montaña Rusa*, imprescindible en todo parque de atracciones, experimentarás la emoción de la alta velocidad. Después de ser empujado lentamente hacia la cima, repentinamente se dispara hacia el abismo y empieza la diversión.

### DATOS TÉCNICOS

1. Inclinación de la rampa inicial: 25°.
2. Longitud de la rampa: 46 m.
3. Masa del vagón: 250 kg.
4. Capacidad del vagón: 4 personas.
5. Longitud total del recorrido: 600 m.
6. Tiempo total del recorrido: 3 minutos.
7. Potencia del sistema de elevación: 30 kW.

### MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Tiempo en subir la rampa.
2. Altura de la rampa.
3. Longitud de la pista de frenado.
4. Tiempo de frenado.
5. Tu masa.

## CONCEPTOS PREVIOS

La energía mecánica se obtiene sumando la energía cinética ( $1/2mv^2$ ) y la energía potencial ( $mgh$ ).

Si sobre un cuerpo actúa solamente su peso, su energía mecánica se mantiene constante en todos los puntos de su trayectoria: teorema de conservación de la energía mecánica. Si actúan otras fuerzas (fuerza del motor o de rozamiento) entonces no se mantiene constante.

El teorema general de conservación de la energía nos dice que el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, exceptuando el peso, es igual al incremento de su energía mecánica.

## CÁLCULOS

1. Calcula la energía mecánica en el punto más alto.
2. Deduce el trabajo necesario para subir el coche.
3. Calcula la potencia mínima del motor de arrastre.
4. Deduce, aplicando el principio de conservación de la energía, ¿cuál será el valor máximo de la velocidad?
5. ¿En qué punto se alcanza este valor?
6. ¿Cuál será la velocidad en el punto medio de su altura?
7. Deduce el trabajo de rozamiento que tienen que aplicar los frenos para detener totalmente el vehículo.
8. ¿Cuál será la fuerza de rozamiento que aplican los frenos, sabiendo que la distancia de frenado es de 5 m?

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. ¿Se cumple el principio de conservación de la energía mecánica?
2. ¿Cuándo te sientes más pesado, al subir o al bajar?
3. Teniendo en cuenta la existencia del rozamiento, ¿puede haber en la montaña dos puntos de máxima altura?
4. ¿Cómo varía la energía cinética si el coche está ocupado por el doble de pasajeros?, ¿y la energía potencial?
5. ¿Cómo funcionaría esta *Montaña Rusa* en la Luna? Razonar la respuesta.
6. ¿Y en un planeta con gravedad de valor doble al de la Tierra?

# Los Rápidos

## DESCRIPCIÓN

Esta atracción simula un rafting donde, a bordo de unos divertidos botes, te deslizarás a gran velocidad por las corrientes vertiginosas de un tumultuoso río en forma de circuito. Seguro que te vas a mojar, pero es imposible que te hundas.

## DATOS TÉCNICOS

1. Capacidad de la barca: 8 personas.
2. Peso de la barca: 1.300 kg.
3. Caudal de agua: 5.000 l/s.
4. Longitud del canal: 600 m.

## MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Tiempo total del recorrido.
2. Diámetro de la barcaza.
3. Tu masa.



## CONCEPTOS PREVIOS

Se dice que un cuerpo se mueve cuando cambia de posición respecto a un punto considerado fijo. A la línea que describe el móvil en su movimiento se llama trayectoria y puede ser rectilínea o curvilínea (circular, elíptica, parabólica). La longitud de la trayectoria nos indica el espacio recorrido. A la relación entre el espacio recorrido y el tiempo empleado por el móvil se denomina velocidad (m/s). La posición de un móvil respecto a un sistema de referencia viene determinada por la ecuación:

$$S = S_0 + v \cdot t$$

Todos los cuerpos sumergidos en un líquido experimentan una fuerza vertical y hacia arriba llamada empuje, que depende del volumen del líquido desalojado y de la densidad del líquido:

$$E = V \cdot D \cdot g$$

## CÁLCULOS

1. ¿Cuál es la velocidad media de la barca a lo largo de todo el recorrido?
2. Calcula el peso total de la barca ocupada por cuatro personas de tu misma masa.
3. Deduce el empuje mínimo que debe ejercer el agua sobre la barca para no hundirse.
4. ¿Cuál será el volumen mínimo que debe estar sumergido en el agua para que la barca flote?
5. ¿Qué valor tendrá el vector desplazamiento cuando termina el recorrido en el mismo punto que la salida?

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. Tomando como referencia la orilla, ¿te estás moviendo?
2. Tomando como referencia un compañero que está sentado frente a ti, ¿te mueves?
3. Describe los tipos de trayectoria que realizas a lo largo de todo el recorrido.
4. ¿Qué observas al subir a la barca?, ¿y al bajarte?
5. ¿Por qué no se hunden las barcas aunque estén llenas de pasajeros?

# La Lanzadera

## DESCRIPCIÓN

¿Sabes lo que se siente al precipitarse al vacío en caída libre? Pruébalo y te quedarás sin aliento. Por primera vez en España podrás disfrutar de una de las pocas atracciones de caída libre que existen en Europa. Experimentarás la vertiginosa sensación de caer 63 metros, en poco más de un segundo, mientras sientes la fuerza de la gravedad con total seguridad, gracias a un innovador sistema magnético de frenado.

## DATOS TÉCNICOS

1. Altura total de la torre: 63 m.
2. Altura de la caída libre: 60 m.
3. Número de elevadores: 3.
4. Capacidad de cada elevador: 4 personas.
5. Peso del elevador vacío: 1.500 kg.
6. Potencia del ascensor: 200 kW.



## MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Tiempo que tarda en ascender el elevador.
2. Tiempo que tarda en la caída.
3. Distancia de frenado.
4. Tu masa.

## CONCEPTOS PREVIOS

Todos los cuerpos situados cerca de la superficie terrestre, se encuentran sometidos a la acción de la fuerza de la gravedad que la Tierra ejerce sobre ellos. De manera que todos

los cuerpos en el vacío y en un mismo lugar de la Tierra, caen con la misma aceleración (valor medio de la gravedad  $9,81 \text{ m/s}^2$ ). Ecuaciones del movimiento de caída libre:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

$$v = v_0 + gt$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 gh$$

## CÁLCULOS

1. Calcula la velocidad media del ascenso.
2. Calcula la velocidad máxima de descenso.
3. ¿Cuál es el peso del ascensor con 4 pasajeros de igual masa?
4. Deduce la fuerza mínima para elevar el ascensor.
5. Calcula el trabajo necesario para subir el ascensor.
6. ¿Cuál es la velocidad que llevas al caer respecto de tu asiento?
7. Aplicando el principio de conservación de la energía, ¿qué valor obtienes para la velocidad final de caída?

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. Clasifica el tipo de movimiento al subir.
2. ¿Qué sensaciones experimentas al caer?
3. Clasifica el movimiento al bajar.
4. ¿En qué tipo de energía se ha transformado la energía mecánica una vez se ha detenido el elevador?
5. Dibuja las fuerzas que actúan cuando estás en reposo en la parte más alta y cuando estás en la mitad del recorrido.
6. Deduce qué valor tendrá el trabajo de rozamiento realizado por el sistema de frenos para detener el ascensor en su caída.

## Los Fiordos



### DESCRIPCIÓN

Diversión y espectáculo, tanto para el que la utiliza como para el que la observa. El recorrido se realiza en una gran barcaza, con capacidad para 20 pasajeros, que cae por la cascada de una montaña de 13 metros de altura hasta un lago, formando una gigantesca ola que envuelve el ambiente.

### DATOS TÉCNICOS

1. Ángulo de inclinación de la rampa de subida:  $30^\circ$ .
2. Ángulo de inclinación de la rampa de caída:  $25^\circ$ .
3. Altura de la rampa de subida: 20 m.
4. Masa de la barca vacía: 400 kg.
5. Potencia motor de elevación: 200 kW.
6. Capacidad del bote: 20 pasajeros.

### MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Longitud de la rampa.
2. Tiempo de subida.

3. Tiempo de caída.
4. Tu masa.
5. Aceleración de caída.

## CONCEPTOS PREVIOS

La energía es una propiedad que poseen los cuerpos, se pone de manifiesto en sus transformaciones, se mide por la capacidad de realizar trabajo, y se expresa en Julios. La energía se intercambia en forma de trabajo cuando hay una fuerza que favorece el desplazamiento de un objeto:

$$\text{Trabajo} = F \cdot S \cdot \cos \alpha$$

La rapidez con que se intercambia energía en forma de trabajo se denomina potencia (vatios) y se obtiene dividiendo el trabajo (Julios) entre el tiempo (segundos).

$$\text{Potencia} = \text{Trabajo}/\text{tiempo}$$

El trabajo que se realiza al elevar un cuerpo a cierta altura se invierte en vencer su peso y se almacena como energía potencial gravitatoria (Julios): teorema de la energía potencial.

$$\text{Trabajo} = E. \text{ potencial} = \text{masa} \cdot \text{gravedad} \cdot \text{altura}$$

## CÁLCULOS

1. Determina el trabajo que realiza el motor para subir la barca hasta la cumbre.
2. ¿Cuál es el coste de cada viaje sabiendo que el kW · h cuesta 15 pesetas?
3. Calcula la potencia del motor, expresada en vatios y en CV, si el rendimiento del motor es del 75%.
4. Deduce la energía potencial en el punto más alto.
5. Dibuja un diagrama donde aparezcan todas las fuerzas que actúan en la subida.
6. ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para subir la rampa, sin considerar rozamientos?
7. ¿Cuántas veces el valor de tu peso es esta fuerza?
8. ¿Qué fuerzas se oponen a la ascensión?
9. Deduce la energía cinética de la barcaza al chocar contra el agua del lago.
10. ¿Se conserva tu energía después de la caída? En caso negativo, ¿en qué se ha transformado?

# El Tornado

## DESCRIPCIÓN

Nunca antes has montado en una *Montaña Rusa* como ésta, con una caída, dos vueltas verticales (*loopings*), un carrusel completo de  $720^\circ$ , un medio carrusel de  $360^\circ$  y una espiral, a través de un recorrido entre las copas de árboles.

## DATOS TÉCNICOS

1. Longitud del recorrido: 800 m.
2. Velocidad máxima: 80 km/h.
3. N° de trenes: dos trenes independientes.
4. Capacidad de cada tren: 24 asientos en filas de dos.
5. Duración: 2 minutos.
6. Capacidad: 1.500 personas/hora.
7. Seguridad: sujeción de arnés y un cinturón manual.
8. *Loops* verticales: 2.



## MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Inclinación de la subida.
2. Longitud de la rampa.
3. Tu masa.
4. Altura máxima.
5. Tiempo en alcanzar la cima.
6. Radio del *loop*.

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. ¿Cuál es la finalidad de la rampa inclinada inicial?
2. ¿Por qué es siempre la primera rampa la más alta?
3. ¿Por qué está la vía ladeada?
4. ¿En qué punto no sientes tu peso?
5. ¿Dónde te sientes más pesado?

## CÁLCULOS

1. Calcula la energía potencial en la primera cima.
2. ¿Qué potencia se utiliza para la ascensión?
3. ¿Qué fuerza se necesita para subir a la cima?
4. Deduce la energía cinética en el punto más bajo.
5. Calcula la velocidad máxima que se puede alcanzar.
6. ¿Cuál es la energía potencial en el punto más bajo.
7. Calcula las fuerzas que actúan sobre tu cuerpo al realizar un *loop* vertical, en el punto más alto de la vertical y en el punto más bajo.

## El Barco Pirata

### DESCRIPCIÓN

Al montar en esta galera sentirás mariposas en tu estómago. El barco se mueve como un gran péndulo que viene y va y, cuando llega a la cima, alcanza una máxima altura de diez metros para volver a descender una y otra vez.

### DATOS TÉCNICOS

1. Longitud del barco: 18 m.
2. Anchura del barco: 8 m.
3. Potencia del motor: 100 CV.
4. Peso del barco: 40 toneladas.
5. Radio de giro: 11 m.

### MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Tiempo en realizar un ciclo completo.
2. Ángulo máximo de inclinación.
3. Altura eje vertical del barco.
4. Tu masa.



### CONCEPTOS PREVIOS

Se denominan movimientos oscilatorios a los movimientos periódicos en los que la posición del móvil respecto del origen, pasa por un valor máximo y un valor mínimo (péndulo). Se llama elongación a la distancia que, en un instante dado, separa al punto oscilante de la posición de equilibrio; a la máxima elongación se le denomina amplitud que es la máxima distancia del punto oscilante a la posición de equilibrio.

## CÁLCULOS

1. Deduce el periodo del movimiento.
2. Calcula el periodo a partir de la expresión del péndulo simple:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ .
3. Deduce la energía potencial y la cinética en el punto de máxima altura y en el de mínima altura.
4. Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica calcula la velocidad máxima.
5. Dibuja todas las fuerzas que actúan en el punto más alto y en el punto más bajo.
6. ¿Qué velocidad tendría que adquirir el barco para realizar una vuelta completa?

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. ¿Cuál es la fuente de energía del barco?
2. ¿Dónde te sientes más ligero y dónde más pesado?
3. Dibuja la proyección de tu movimiento sobre el eje X.
4. ¿Es un movimiento periódico?, ¿es oscilatorio?
5. ¿Qué mecanismo de frenado se utiliza?, ¿cómo actúa?
6. Explica el movimiento del barco a partir de cambios de energía mecánica.
7. Para oscilaciones con ángulos muy pequeños, ¿cómo puede considerarse la trayectoria?

## Las Sillas Voladoras



### DESCRIPCIÓN

Después de tomar asiento y asegurarte con el cinturón, empiezas a girar y, al aumentar la velocidad, los asientos se elevan e inclinan hasta una altura de varios metros. Experimentarás una sensación de flotación como si volaras.

### DATOS TÉCNICOS

1. Potencia del motor de giro: 55 kW.
2. Longitud de la cadena: 5 m.
3. Número de asientos: 30.
4. Diámetro de la plataforma: 22 m.
5. Inclinación máxima de los asientos: 20°.

### MEDIDAS Y ESTIMACIONES

1. Tiempo en realizar dos vueltas.
2. Periodo.

3. Radio de giro.
4. Altura de los asientos en movimiento.

## CÁLCULOS

1. Calcula la máxima velocidad lineal y angular.
2. Deduce la frecuencia del movimiento.
3. Existe aceleración, ¿de qué clase?
4. Realiza un diagrama con todas las fuerzas que actúan.
5. Calcula la fuerza centrípeta que actúa sobre ti.
6. ¿Cuál es el valor de la tensión de la cadena?
7. Obtén la energía cinética y potencial de la silla cuando estás sentado en movimiento.

## CUESTIONES Y OBSERVACIONES

1. Describe tus sensaciones al ir girando.
2. ¿Qué tipo de trayectoria describen las sillas?
3. ¿Qué experimentas cuando aumenta la velocidad?
4. ¿Se inclinan igual los asientos que van vacíos que los que van ocupados?, ¿por qué?
5. ¿Influye la distancia de la silla al eje de giro en el ángulo de inclinación respecto a la vertical?

## 4. EVALUACIÓN

### 4.1. EVALUACIÓN TIPO PRUEBA OBJETIVA

- Suponiendo que la velocidad máxima que adquieres al descender en *la Lanzadera* es de 28 m/s y el tiempo empleado en parar es de 3,4 segundos, ¿cuál es la aceleración de frenada?  
A: 9,8 m/s<sup>2</sup>      B: 10 m/s<sup>2</sup>  
C: Cero      D: 8 m/s<sup>2</sup>
- Dos coches de choque de 100 kg cada uno, llevan una velocidad de 1,5 m/s y chocan frontalmente. Después de la colisión, ambos coches tienen una velocidad de 1 m/s en la misma dirección y sentido opuesto. Se puede afirmar que el choque es:  
A: Elástico      B: No elástico  
C: Inelástico      D: Conservativo
- Los caballitos de un *Tiovivo* están situados a 3 m de distancia del eje de giro y dan vueltas con una velocidad de 12 r.p.m. El tiempo que tarda en dar una vuelta completa es:  
A: 4 s      B: 12 s  
C: 5 s      D: 0,5 s
- La barcaza de *los Fiordos* se desliza vacía desde 25 m de altura partiendo del reposo. ¿Cómo se modifica la velocidad de impacto en el agua cuando la barca transporta tantos pasajeros como para duplicar el peso de la misma?  
A: Se duplica      B: No se modifica  
C: Se divide por dos      D: Se cuadruplica
- Las barcas neumáticas de *los Rápidos* tienen una masa de 200 kg y están ocupadas por 6 personas de 50 kg cada una. ¿Cuál debe ser el volumen mínimo sumergido para que no se hundan?  
A: 10 m<sup>3</sup>      B: 1 m<sup>3</sup>  
C: 2 m<sup>3</sup>      D: 0,5 m<sup>3</sup>
- Las Sillas Voladoras* tienen una masa de 10 kg y llegan a alcanzar la velocidad de 1 m/s describiendo un círculo de radio 15 m. Si se soltase la silla de la cadena, ¿con qué fuerza saldría despedida?  
A: 25 N      B: 50 N  
C: 250 N      D: 500 N
- La rampa inicial de *los Siete Picos* forma un ángulo de 25° respecto a la horizontal. Si la longitud de la rampa es de 50 m, ¿cuál será la altura de la rampa?  
A: 38 m      B: 25 m  
C: 30 m      D: 50 m

8. *El Barco Pirata* describe 3 oscilaciones completas en 9 segundos. El periodo de este movimiento será:
- A: 3 s                      B: 0,3 s  
C: 1 s                        D: 4,5 s
9. La primera cima del *Tornado* tiene una altura de 50 m y la segunda cima tiene una altura de 25 m. Podemos deducir que la velocidad de caída en la primera cima es:
- A: Igual que en la segunda    B: Doble que en la segunda  
C:  $2^{1/2}$  la primera            D: Mitad que en la segunda
10. *La Noria* se mueve con una velocidad angular de 5 r.p.m. y su diámetro es de 22 m. La velocidad lineal será:
- A: 6 m/s                      B: 10 m/s  
C: 9,8 m/s                    D: 11 m/s

## 4.2. EJERCICIOS PARA EVALUAR

1. Por *los Siete Picos* circula una vagoneta de masa 250 kg tras dejarse caer de una altura de 15 m.
- Calcula:
- La máxima velocidad que llevaría en un punto del recorrido que se encuentra a 6 m de altura.
  - La máxima altura que podría alcanzar en el ascenso.
  - La altura mínima desde la que debería partir para llegar al punto final del recorrido.
2. El caballito de un *Tiovivo* gira a razón de 10 vueltas por minuto y la distancia al eje de rotación es de 5 m.
- Calcula:
- La frecuencia y el periodo de ese movimiento.
  - La velocidad angular y lineal del caballito.
  - La aceleración centrípeta.
  - La fuerza responsable del movimiento.
3. Ordena las siguientes atracciones giratorias de menor a mayor velocidad angular:
- La Noria* realiza 2,5 vueltas cada medio minuto.
  - El Tiovivo* describe un radian cada segundo.
  - Las Sillas Voladoras* giran a 11 r.p.m.
4. Ordena las velocidades máximas de las atracciones:
- Los Siete Picos* alcanzan los 50 km/h.
  - Un coche de choque recorre 44 metros en diez segundos.
  - En *el Tornado* se llega hasta 22 m/s.

5. La fuerza de frenada de un coche de *los Siete Picos*, al terminar el recorrido, es tal que le permite parar en 15 m yendo a una velocidad de 72 km/h. ¿Qué distancia de frenado necesitaría si su velocidad fuese de 108 km/h?
6. Suponiendo que cada rail de una vía de una *Montaña Rusa* tiene una longitud de 8 m, ¿qué separación ha de haber entre ellos cuando la temperatura es de  $-10^{\circ}\text{C}$ , para que la vía no se deforme como consecuencia de los cambios de temperatura, si esta aumenta hasta  $40^{\circ}\text{C}$ ?

*Coefficiente de dilatación del metal:*  $1,2 \cdot 10^{-5}$

7. Un coche de choque tiene una masa de 300 kg, avanza con una velocidad de 1,4 m/s y choca frontalmente contra otro que está en reposo. Suponiendo que tras la colisión quedan los dos coches unidos, calcula:
  - a. La velocidad después del choque.
  - b. Deduce el tipo de choque que ha tenido lugar.
8. Supón que un coche que circula a 80 km/h choca frontalmente contra un muro, se deforma mucho y se detiene. El conductor del coche, sujeto al cinturón de seguridad, recorre una distancia de un metro antes de detenerse por completo.

Calcula:

- a. La duración del choque.
  - b. La deceleración del choque.
9. El tren de una *Montaña Rusa* arranca con movimiento uniformemente acelerado por una vía circular de 500 m de radio. A los 25 segundos de iniciado el movimiento, alcanza una velocidad de 36 km/h.

Calcula:

- a. El valor de la aceleración tangencial.
  - b. El módulo de la aceleración normal.
  - c. La aceleración total.
  - d. Calcula estas aceleraciones una vez que se alcanza la velocidad máxima y suponiendo ausencia de rozamiento.
10. El elevador de *la Lanzadera* sube con velocidad constante de 4m/s y, cuando se encuentra a 50 m de altura, a un pasajero se le cae una moneda. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:
    - a. La velocidad de la moneda al llegar al suelo.
    - b. El tiempo que tarda en caer.
    - c. La velocidad media y la rapidez media.

Si se le cae la moneda cuando esta bajando, ¿qué observará?

11. ¿Desde qué altura tiene que dejarse caer un coche en una montaña rusa para que sea capaz de efectuar un giro completo *looping*, suponiendo que no hay rozamiento y el radio de la pista es de 15 m? Calcula la velocidad mínima para que pueda completar el giro. Dibuja los vectores que intervienen en el punto más alto del giro.
12. Desde lo alto de la atracción *los Fiordos*, de longitud 30 m y que forma un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal, se desliza la barca de pasajeros con una masa total de 1.000 kg. Si el coeficiente cinético al deslizarse es de 0.15, calcula:
- El trabajo total realizado durante la bajada.
  - La velocidad con la que la barca choca contra el agua.
13. El motor eléctrico de *la Noria* consume 50 kW y tiene una potencia útil de 60 CV. Calcula:
- El rendimiento del motor.
  - La energía que se disipará después de media hora.
  - El gasto por día, si el precio del kW·h es de 20 pesetas.
14. Un coche de choque de masa 150 kg circula con una velocidad de 3 m/s y choca frontalmente con otro de masa 160 kg y velocidad 2 m/s. Si el choque es de tipo elástico, calcula la velocidad de cada coche después del choque.
15. Una vez iniciado el movimiento, *la Noria* alcanza una velocidad angular de 5 r.p.m., y el diámetro es de 22 m. Calcula:
- La velocidad lineal.
  - Las vueltas que dará en 10 s.
  - El periodo y la frecuencia.
  - La aceleración centrípeta.
16. Una persona sentada en el *Barco Pirata* se balancea hasta una altura de 18 metros, sabiendo que en reposo está a una altura de 3 m del suelo y que el radio de balanceo es de 11 m, calcula:
- ¿Cuál es la velocidad máxima que puede conseguir?
  - ¿Cuál es la variación en la energía cinética desde el punto más bajo al punto más alto?
17. Si montas en el rotor alcanzas una velocidad de giro de 12 r.p.m. Conociendo la distancia al eje de giro que es de 5,6 m y sabiendo tu masa, calcula la fuerza centrípeta que actúa sobre ti.

18. La rampa inicial del tornado tiene una inclinación de  $30^\circ$  hasta alcanzar la cima a 30 m de altura.
- Calcula:
- La longitud de la rampa.
  - Si la masa que sube es de 300 kg, ¿cuál será la fuerza necesaria para elevarla hasta la cima a velocidad constante?
  - El trabajo realizado en esta elevación.
19. Calcula la velocidad a la que debería circular un coche para que el efecto causado en un choque contra un muro fuese equivalente al que se produciría si este mismo coche cayese al vacío desde lo alto de la *Lanzadera* que se encuentra a 60 m.
20. ¿Qué trabajo hay que realizar para frenar el vehículo de una atracción cuya masa es de 500 kg, de manera que su velocidad se reduzca de 72 km/h a 3,6 km/h?
21. Un coche de 500 kg se desliza por una *Montaña Rusa*. En el punto A, de 30 m, lleva una velocidad de 5 m/s y en el punto B, de 20 m de altura, la velocidad es de 3,2 m/s. ¿Cuánto vale el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento? Si a partir de B se considera despreciable el rozamiento, ¿hasta qué altura ascenderá el coche?

## **TERCERA PARTE**

### **Fundamento teórico y desarrollo de las unidades didácticas**





# 1. INTRODUCCIÓN

A continuación se proponen al profesor algunas ideas teóricas y pautas de aplicación práctica de las distintas atracciones, así como algunos ejemplos numéricos basados en los datos técnicos de las respectivas atracciones.

Como se dice en otras partes de este trabajo, la principal sensación que siente el cuerpo humano, y que a muchos les causa placer, es la aceleración. El fundamento físico de la mayoría de atracciones es la aparición de aceleraciones, ya sea por variación en el módulo de la velocidad, movimiento armónico o de caída libre; ya por variación en su dirección, movimientos curvilíneos.

Sin embargo, existen otras variables que pueden ser estudiadas con provecho a partir de la mayoría de atracciones, tanto mecánicas, (energías, trabajo, teoremas de conservación, momentos angulares, etc), como derivadas de los sistemas de propulsión y frenado, especialmente electricidad.

También es posible iniciarse en la mecánica de fluidos y en muchos otros aspectos que aquí simplemente se esbozan.

Este trabajo se completa con unas simulaciones informáticas con la hoja de cálculo Excel que pensamos pueden ser de utilidad a la hora de sugerir ejercicios a sus estudiantes. El nivel de profundización es evidente que queda a la decisión del docente.

## 2. ATRACCIONES MECÁNICAS

### La Noria

#### 1. IDEAS BÁSICAS

Dentro del conjunto de atracciones consistentes en una gran rueda que gira en el plano vertical y a cuya periferia se fija un conjunto de habitáculos, a modo de cangilones de una noria, existen distintas variantes. En la más simple, los habitáculos están siempre suspendidos y los viajeros están en posición más o menos vertical, cabeza arriba.

En otros modelos, sin embargo, los viajeros llegan a rizar el rizo, poniéndose boca abajo.



## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

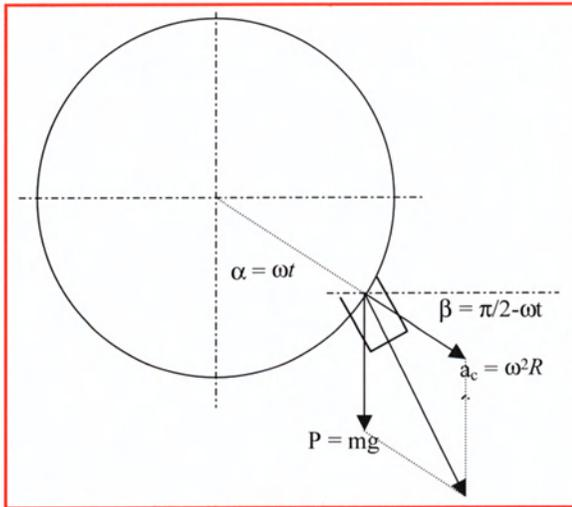


Figura 1. Esquema de aceleraciones

Al margen de particularidades de construcción, la variable fundamental es la velocidad de rotación.

En lo que sigue se asumirá que *la Noria* gira con movimiento circular uniforme, hipótesis que debe verificarse por los estudiantes.

Además por simplicidad se supondrá un radio de giro constante y contrariamente a lo que se ha hecho hasta ahora, se razonará desde el punto de vista del observador no inercial, es decir, se introducirá una fuerza de inercia ficticia.

En el diagrama se puede apreciar el ángulo  $\delta$  que la cápsula de los viajeros forma con la vertical. Un poco de trigonometría elemental lleva a que

$$\tan \delta = \frac{\omega^2 R \operatorname{sen} \omega t}{g + \omega^2 R \operatorname{cos} \omega t}$$

Obsérvese que existe una limitación de la velocidad angular de la *Noria* por encima de la cual la cápsula se alinea con el radio y "riza el rizo".

## 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

Los datos técnicos de *la Noria* son:

- Radio de la rueda principal 11 m.
- Velocidad angular de giro 5 r.p.m que equivale a 0,523 rad/s.
- Potencia del motor 60 CV.
- Masa de la *Noria* 60 Tm.

Los estudiantes pueden verificar el segundo dato contando el tiempo que tarda en dar una vuelta completa.

También pueden medir de forma aproximada la aceleración tangencial de frenado calculando el tiempo que tarda en dar las últimas vueltas y aplicando la ecuación

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega^2}{4\pi n} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_t = R\bar{\alpha} = \frac{\omega^2 R}{4\pi n}$$

Siendo  $n$  el número de vueltas a partir de las cuales empieza a disminuir la velocidad de giro.

También pueden calcular la aceleración máxima que experimentan los viajeros en su trayectoria.

Si se desea calcular el momento inercia de la *Noria*, puede procederse como en la atracción del *Tiovivo*.

#### 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

En este ejemplo se trata, por una parte, de calcular la aceleración en cada instante y, por otra, de reconstruir la trayectoria real de cada cangilón de *la Noria*.

Para ello se sigue la metodología habitual, es decir, crear una sección de la hoja en que se sitúan los datos empíricos de la atracción, en este caso los de *la Noria*, y la distancia aproximada del viajero al punto de suspensión del habitáculo, además del tiempo invertido en una vuelta, por ser la magnitud más fácilmente medible por los estudiantes<sup>1</sup>. Como consecuencia se calcula la velocidad angular.

El intervalo temporal de reconstrucción de la columna de tiempos, se calcula tomando como base el periodo de *la Noria* dividido en 2.000 partes, suficientes y manejables para una correcta aproximación. Se podrá, como siempre, reconstruir del modo habitual la serie de tiempos. Se programan sendas columnas con los valores del ángulo de separación,  $\delta$ , las aceleraciones centrífuga y total<sup>2</sup> y las coordenadas de posición de la periferia de la rueda en que se inserta la cabina y del centro de masas de ésta.

Las coordenadas de este último punto se obtienen como suma vectorial de ambos vectores posición  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_{i0}$ .

Las fórmulas informáticas son:

$$d = \text{ATAN}(\text{\$D\$2}^2 * \text{\$A\$2} * \text{SENO}(\text{\$D\$2} * \text{A4}) / (9,8 + \text{\$D\$2}^2 * \text{\$A\$2} * \text{COS}(\text{\$D\$2} * \text{A4})))$$

$$ac = \text{\$D\$2}^2 * \text{\$A\$2}$$

$$a = \text{RAIZ}(9,8^2 + \text{C4}^2 + 2 * 9,8 * \text{C4} * \text{COS}(\text{\$D\$2} * \text{A4}))$$

$$x = \text{\$A\$2} * \text{SENO}(\text{\$D\$2} * \text{A4}) + \text{\$B\$2} * \text{SENO}(\text{B4})$$

$$y(\text{Cabina}) = \text{\$A\$2} * \text{SENO}(\text{\$D\$2} * \text{A4} - \text{PI}() / 2) - \text{\$B\$2} * \text{COS}(\text{C4})$$

---

<sup>1</sup> Independiente del dato que facilita la empresa, que siempre debe, en aras del método científico, ponerse en cuestión y verificarse experimentalmente.

<sup>2</sup> No se olvide que en este ejercicio la referencia es el sistema de referencia no inercial. Este particular se tendrá siempre muy en cuenta a fin de evitar errores conceptuales que, lamentablemente, la experiencia demuestra que son muy persistentes.

Microsoft Excel - Noria

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?

C3 = ac/(m/s<sup>2</sup>)

| 1  | R/m   | r/m        | T/s                    | w/(rad/s)             | dt/s       |             |            |             |  |
|----|-------|------------|------------------------|-----------------------|------------|-------------|------------|-------------|--|
| 2  | 11    | 1          | 12                     | 0,52359878            | 0,006      |             |            |             |  |
| 3  | t/s   | $\delta$   | ac/(m/s <sup>2</sup> ) | a/(m/s <sup>2</sup> ) | x          | y(Cabina)   | X          | Y(Rueda)    |  |
| 4  | 0     | 0          | 3,01571246             | 12,8157125            | 0          | -10,0079125 | 0          | -11         |  |
| 5  | 0,006 | 0,00073926 | 3,01571246             | 12,8157011            | 0,03529672 | -10,0078582 | 0,03455746 | -10,9999457 |  |
| 6  | 0,012 | 0,00147852 | 3,01571246             | 12,8156669            | 0,0705931  | -10,0076953 | 0,06911458 | -10,9997829 |  |
| 7  | 0,018 | 0,00221777 | 3,01571246             | 12,81561              | 0,10588879 | -10,0074239 | 0,10367102 | -10,9995115 |  |
| 8  | 0,024 | 0,00295701 | 3,01571246             | 12,8155304            | 0,14118344 | -10,0070439 | 0,13822644 | -10,9991315 |  |
| 9  | 0,03  | 0,00369624 | 3,01571246             | 12,815428             | 0,17647672 | -10,0065554 | 0,17278049 | -10,998643  |  |
| 10 | 0,036 | 0,00443545 | 3,01571246             | 12,8153028            | 0,21176827 | -10,0059583 | 0,20733284 | -10,9980459 |  |
| 11 | 0,042 | 0,00517465 | 3,01571246             | 12,8151548            | 0,24705776 | -10,0052527 | 0,24188314 | -10,9973402 |  |
| 12 | 0,048 | 0,00591383 | 3,01571246             | 12,8149842            | 0,28234484 | -10,0044385 | 0,27643105 | -10,9965261 |  |
| 13 | 0,054 | 0,00665298 | 3,01571246             | 12,8147907            | 0,31762916 | -10,0035158 | 0,31097623 | -10,9956034 |  |
| 14 | 0,06  | 0,0073921  | 3,01571246             | 12,8145745            | 0,35291039 | -10,0024846 | 0,34551835 | -10,9945722 |  |
| 15 | 0,066 | 0,0081312  | 3,01571246             | 12,8143355            | 0,38818817 | -10,0013449 | 0,38005706 | -10,9934324 |  |
| 16 | 0,072 | 0,00887027 | 3,01571246             | 12,8140738            | 0,42346216 | -10,0000967 | 0,41459201 | -10,9921842 |  |
| 17 | 0,078 | 0,00960929 | 3,01571246             | 12,8137894            | 0,45873202 | -9,99873993 | 0,44912287 | -10,9908275 |  |
| 18 | 0,084 | 0,01034829 | 3,01571246             | 12,8134821            | 0,4939974  | -9,99727474 | 0,4836493  | -10,9893623 |  |
| 19 | 0,09  | 0,01108723 | 3,01571246             | 12,8131522            | 0,52925796 | -9,99570108 | 0,51817096 | -10,9877886 |  |
| 20 | 0,096 | 0,01182614 | 3,01571246             | 12,8127995            | 0,56451336 | -9,99401898 | 0,5526875  | -10,9861065 |  |
| 21 | 0,102 | 0,012565   | 3,01571246             | 12,812424             | 0,59976325 | -9,99222845 | 0,58719859 | -10,984316  |  |
| 22 | 0,108 | 0,0133038  | 3,01571246             | 12,8120258            | 0,63500729 | -9,99032951 | 0,62170388 | -10,9824171 |  |
| 23 | 0,114 | 0,01404256 | 3,01571246             | 12,8116048            | 0,67024513 | -9,98832217 | 0,65620304 | -10,9804097 |  |
| 24 | 0,12  | 0,01478126 | 3,01571246             | 12,8111611            | 0,70547643 | -9,98620647 | 0,69069571 | -10,978294  |  |

Gráfico2 Hoja1 Hoja2 Hoja3

Dibujar Autoformas

Listo NUM

Los resultados se recogen en la tabla facsimil. La Figura 2 representa, con las aproximaciones hechas, las trayectorias de la *Noria* y de la cabina.

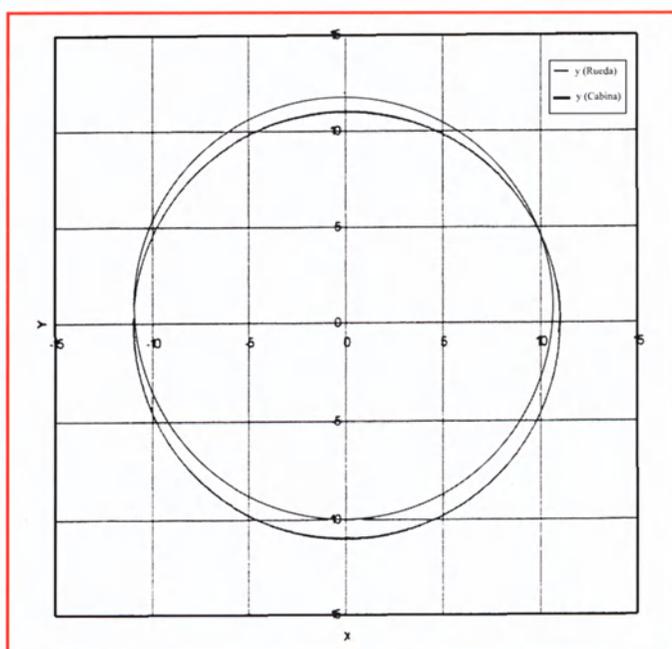


Figura 2. Trayectorias de cabina y rueda principal

Como siempre, según nuestro método, es posible experimentar con cambios del tipo ¿qué ocurriría si...? Es suficiente modificar cualesquiera de los datos de la entrada de la tabla para que automáticamente se obtengan los resultados analíticos y gráficos.

Si se modifican los radios respectivos y la velocidad de rotación, se obtienen resultados que, aunque no sean representativos de lo que ocurre en la atracción del Parque, sí son muy interesantes tanto física como geoméricamente.

## 1. IDEAS BÁSICAS

Dentro de la sencillez de la atracción, es evidente que se trata de un movimiento compuesto. Su tratamiento se enfoca sobre todo pretendiendo resaltar este hecho.

Por una parte, participa de los caracteres generales del movimiento circular; por otra, de un movimiento de sube y baja de los caballitos. Este movimiento no tiene que ser necesariamente armónico; investigarlo significaría una medición de la posición del caballito en distintos instantes o, puesto que el carrusel da vueltas, en distintas posiciones al borde de su circunferencia.

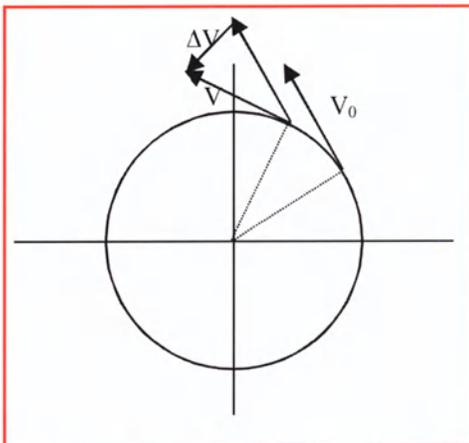


Figura 1. Variación del vector velocidad en un movimiento circular uniforme

## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

Desarrollando la coordenada circular, y tomando la altura del caballito como coordenada  $y$ , permitirá establecer su carácter de armónico, en cuyo caso la gráfica debe aproximarse a una senoide; mientras que si no cumple esta característica, y el caballito sube y baja con velocidad uniforme, se parecerá más a un diente de sierra.

Otro tipo de actividades que pueden realizarse están relacionadas con el carácter relativo del movimiento; por ejemplo, puede dejarse caer un objeto cuando el caballito se encuentra en el punto más alto, más bajo o de pie en el suelo y observar en cada caso el punto de caída. Deberá comprobarse que la

tendencia del objeto pesado es a seguir en línea recta, lo cual significa que deberá caer sobre la tangente de la trayectoria circular descrita por el caballito y no sobre esta trayectoria.

Se pone, pues, de manifiesto la importancia de la fuerza centrípeta para *obligar* al caballito a girar.

Siempre se resaltarán a los estudiantes que todo movimiento circular es acelerado ya que la dirección del vector velocidad cambia en cada instante, incluso para un pasajero que permaneciera quieto en un punto cualquiera del carrusel.

En la gráfica se observa como el vector<sup>3</sup>  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  no es nulo a pesar que los módulos de los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v}_0$  son iguales.

<sup>3</sup> A lo largo de este trabajo se utiliza la convención habitual de escribir en negrita los vectores, sólo cuando se desea de modo explícito destacar el carácter vectorial, se utilizará la flecha.

### 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

Según los datos facilitados por la empresa, el diámetro del *Tiovivo* es de 10 m, no obstante, hay que considerar que los caballitos no están a esta distancia del eje.

La velocidad de rotación es de 10 r.p.m.

La oscilación de los caballitos es de 0,5 m, la masa es de 30 Tm y el motor que impulsa el conjunto es de 60 CV.

En este caso, a las aceleraciones que siente el viajero debidas al movimiento de rotación

$$a_c = \omega^2 R \leq \left( \frac{20\pi}{60} \right)^2 5 = 5,48 \text{ ms}^{-2}$$

hay que sumar la aceleración variable en sentido vertical. En la práctica, esta aceleración variable no es muy grande y la centrípeta tampoco, por lo que en esta atracción las aceleraciones no son determinantes en la sensación que sufre el pasajero.

Otra aplicación interesante puede ser calcular el momento de inercia del *Tiovivo* y su radio de giro. Para ello, debe estimarse el tiempo que *el Tiovivo* alcanza su régimen de giro uniforme. Aplicando entonces el teorema de las fuerzas vivas y conocida la potencia del motor, que se supone máxima, se tiene

$$W = P\Delta t = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow I = \frac{2P\Delta t}{\omega^2}$$

$$P = 60 \text{ CV} = 60 \cdot 746 \text{ W} = 44,760 \text{ kW}$$

$$\omega = 20\pi / 60 = 1,047 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\Delta t \cong 120 \text{ s (esta estimación debe verificarse)}$$

Conduce a  $I = 9,79 \cdot 10^6 \text{ kg m}^2$ , siempre despreciando rozamientos y suponiendo que toda la potencia se invierte en hacer girar *el Tiovivo*.

Estas aproximaciones deben discutirse con los estudiantes y analizar su corrección.

### 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

El análisis del movimiento puede hacerse de distintas formas; aquí se ha optado por una simulación informática, usando la hoja Excel.

Se ha preparado una hoja, como se ha hecho en otras atracciones, dejando los parámetros fuera de la zona de cálculo a fin de poder manipularlos con comodidad.

Los parámetros que se han tomado son:

- Radio del caballito.
- Amplitud de su oscilación.

- Periodo de rotación.
- Periodo de oscilación del caballito.
- Masa del viajero.
- Incremento temporal.

Los periodos se estimarán por los estudiantes con un cronómetro, así como la amplitud de la oscilación del caballito.

Se preparan las columnas correspondientes a las magnitudes que se desea analizar. En este ejercicio se toman tiempos, posición según los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , componentes de la velocidad, velocidad tangencial, velocidad vertical, aceleración centrípeta y aceleración vertical.

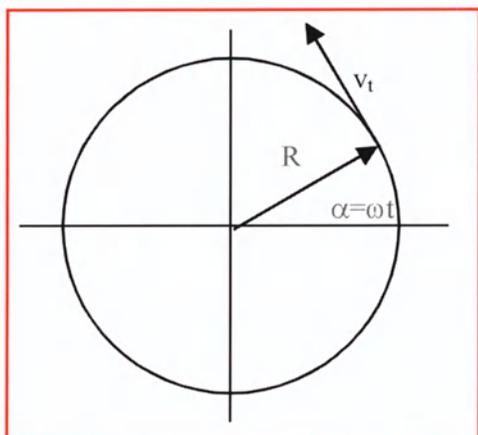


Figura 2. Velocidad tangencial

Los ejes  $x$  e  $y$  son arbitrarios, puede fijarse una referencia cualquiera. El eje  $z$  obviamente es el vertical.

En la figura se ve claro que las coordenadas  $x$  e  $y$  se calculan como:

$$x = R \cos \omega t = R \cos (2\pi t / T)$$

$$y = R \sin \omega t = R \sin (2\pi t / T)$$

siendo  $R$  el radio del caballito y  $T$  el periodo de rotación.

Respecto al caballito, se asumirá un movimiento armónico de modo que  $z = A \cos 2\pi t / T$ .

En ambos casos se prescinde de los ángulos iniciales de fase por sencillez de operación.

|    | B           | C          | D                   | E          | F          | G           | H          | I           | J          |
|----|-------------|------------|---------------------|------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|
| 1  | Amplitud(m) | T rot(s)   | T oscilación(εdt(s) | m (kg)     |            |             |            |             |            |
| 2  | 0,5         | 120        | 10                  | 0,2        | 70         |             |            |             |            |
| 3  | x           | y          | z                   | vt         | vz         | az          | ac         | x'          | y'         |
| 4  |             | z          | 0                   | 0,15707963 | 0          | 19,7392088  | 0,00822467 | -2,59807621 | 2          |
| 5  | 2,99983551  | 0,03141535 | 0,49605735          | 0,15707963 | 3,94784176 | 19,5835592  | 0,00822467 | -2,57072726 | 2,01168278 |
| 6  | 2,99934205  | 0,06282726 | 0,49429158          | 0,15707963 | 7,86455361 | 19,1190653  | 0,00822467 | -2,54309641 | 2,01537624 |
| 7  | 2,99851968  | 0,09423228 | 0,46488824          | 0,15707963 | 11,8883667 | 18,3530522  | 0,00822467 | -2,51518667 | 2,01126422 |
| 8  | 2,99736849  | 0,12562696 | 0,43815334          | 0,15707963 | 15,3689771 | 17,2976005  | 0,00822467 | -2,48700112 | 1,99965107 |
| 9  | 2,99590086  | 0,15700787 | 0,40450085          | 0,15707963 | 18,8104972 | 15,9693554  | 0,00822467 | -2,45854284 | 1,98095673 |
| 10 | 2,99408019  | 0,18837156 | 0,36448431          | 0,15707963 | 22,0123683 | 14,3892639  | 0,00822467 | -2,42981495 | 1,95671019 |
| 11 | 2,99194343  | 0,21971459 | 0,31871199          | 0,15707963 | 24,8902211 | 12,5822452  | 0,00822467 | -2,4008206  | 1,92454101 |
| 12 | 2,98947850  | 0,25103363 | 0,2679134           | 0,15707963 | 27,4066701 | 10,576797   | 0,00822467 | -2,37156298 | 1,88816945 |
| 13 | 2,98668589  | 0,28232494 | 0,21288965          | 0,15707963 | 29,5220295 | 8,40454634  | 0,00822467 | -2,34204529 | 1,84739506 |
| 14 | 2,98356569  | 0,31358539 | 0,15450885          | 0,15707963 | 31,2029388 | 6,09975098  | 0,00822467 | -2,31227076 | 1,80308404 |
| 15 | 2,98011803  | 0,34481145 | 0,09369066          | 0,15707963 | 32,422689  | 3,69075889  | 0,00822467 | -2,28224267 | 1,75615553 |
| 16 | 2,9763441   | 0,3759997  | 0,03139526          | 0,15707963 | 33,1626408 | 1,23943518  | 0,00822467 | -2,25196431 | 1,70756716 |
| 17 | 2,97224352  | 0,40714672 | -0,03139526         | 0,15707963 | 33,4105278 | -1,23943518 | 0,00822467 | -2,221439   | 1,65829986 |
| 18 | 2,967817    | 0,43824909 | -0,09369066         | 0,15707963 | 33,1626408 | -3,69075889 | 0,00822467 | -2,19067007 | 1,60934238 |
| 19 | 2,96306502  | 0,46930034 | -0,15450885         | 0,15707963 | 32,422689  | -6,09975098 | 0,00822467 | -2,15966092 | 1,56167571 |
| 20 | 2,95799811  | 0,50030624 | -0,21288965         | 0,15707963 | 31,2029388 | -8,40454634 | 0,00822467 | -2,12841493 | 1,51625753 |
| 21 | 2,95259682  | 0,53125422 | -0,2679134          | 0,15707963 | 29,5220295 | -10,576797  | 0,00822467 | -2,09693555 | 1,47400712 |
| 22 | 2,94686175  | 0,56214394 | -0,31871199         | 0,15707963 | 27,4066701 | -12,5822452 | 0,00822467 | -2,0652262  | 1,43579085 |
| 23 | 2,94081352  | 0,59297202 | -0,36448431         | 0,15707963 | 24,8902211 | -14,3892639 | 0,00822467 | -2,03329039 | 1,40240846 |
| 24 | 2,93444426  | 0,62373507 | -0,40450885         | 0,15707963 | 22,0123683 | -15,9693554 | 0,00822467 | -2,00113159 | 1,37458044 |

La programación de las columnas es casi inmediata. En tiempos se procurará abarcar una vuelta completa por lo menos.

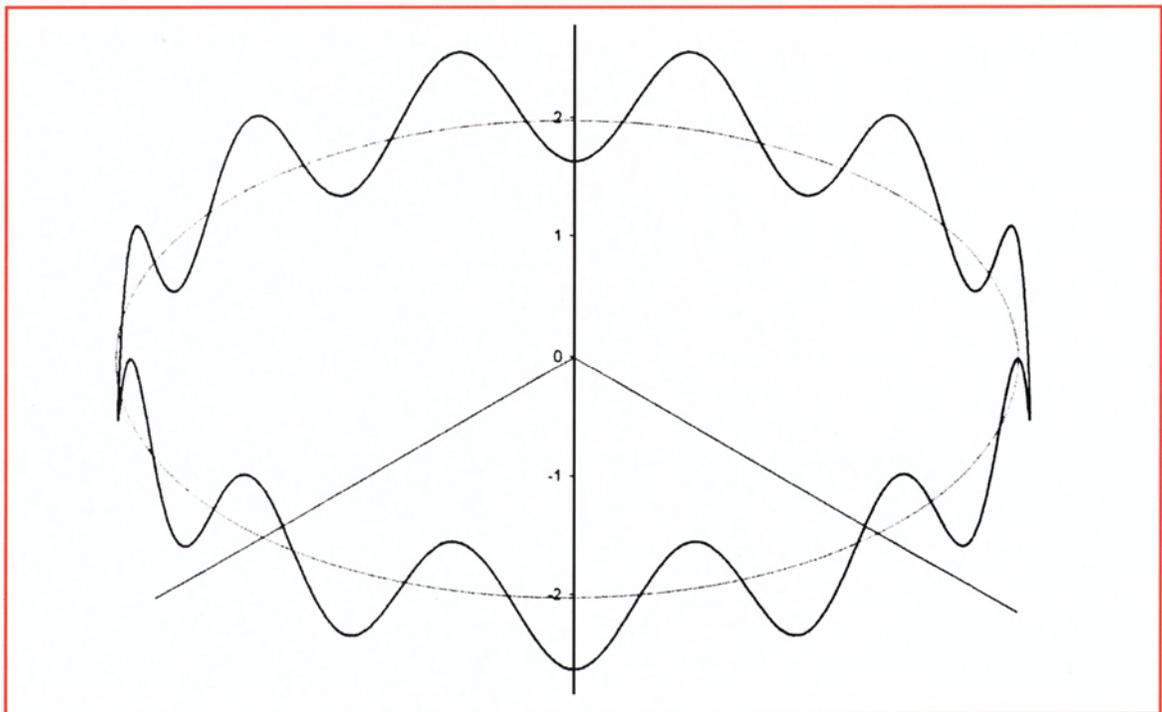
La aceleración vertical se programa como  $a = (2\pi / T)^2 z$  y la velocidad de modo elemental  $v_{i+1} = v_i + a dt$ .

Se han introducido dos columnas  $x'$  e  $y'$  que tienen por objeto permitir el dibujo en perspectiva isométrica de la trayectoria real del caballito. Así pues:

$$x' = (y - x) \cos \pi/6$$

$$y' = z (y + x) \sin \pi/6$$

De este modo se solventa la dificultad de Excel para gráficos tridimensionales y es fácil obtener una gráfica de la trayectoria real del caballito.



**Figura 3.** *Trayectoria del caballito*

# Los Coches de Choque

## 1. IDEAS BÁSICAS

Los *Coches de Choque* son una de las atracciones más típicas y proporcionan una buena base para la reflexión física. Como es sabido, se trata de una pista en la que los coches tratan de chocar y esquivarse. Su estudio, tanto directo, y en varios campos de la Física, como aplicando similitudes con otros fenómenos, puede aportar muy buenas bases de razonamiento.

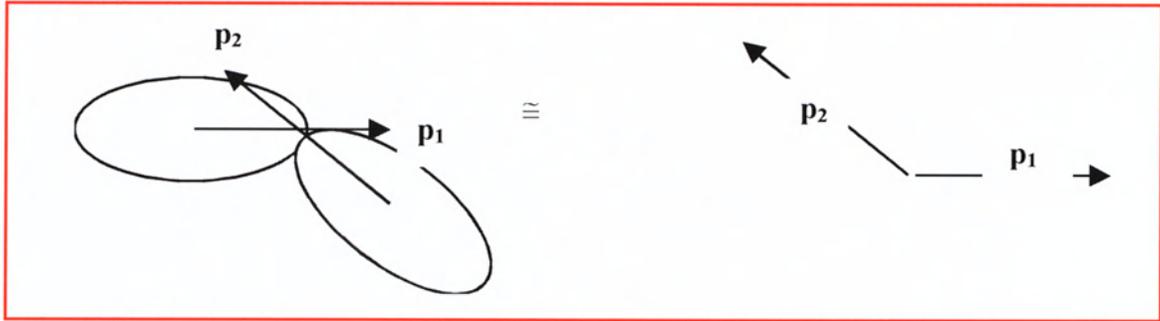


## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

### 2.1. Mecánica

- a. Choque propiamente dicho. En primera aproximación se trata de choques elásticos puesto que el motor del coche recupera la energía perdida en el choque. Obsérvese que los choques no son frontales por lo que debería analizarse la interacción en forma vectorial.
- b. No obstante lo dicho, los tripulantes de los cochecitos sufren los impactos de los choques, lo que significa que algo de la energía del choque no es devuelta al sistema, de ahí la necesidad del motor.
- c. Es una buena simulación de un gas debido a que, aunque los coches no se mueven al azar, cada conductor sabe bien lo que quiere. En promedio, los que buscan el choque frente a los que lo rehuyen, los habilidosos frente a los inhábiles, permite considerar el sistema como partículas que se mueven al azar. Es posible estimar un recorrido libre medio, distancia que recorrería cada cochecito entre choque y choque.
- d. Los choques contra los bordes de la pista simularían la presión del gas sobre las paredes.
- e. Puede comprobarse también cómo el centro de masa del sistema permanece prácticamente en el centro de la pista, lo que confirma lo dicho antes.
- f. Alimentación del motor.

A modo de recordatorio, se indica que en el choque oblicuo bidimensional es una buena práctica plantear las ecuaciones para cada uno de los ejes OX y OY elegidos arbitrariamente.



**Figura 1.** Diagrama de cantidades de movimiento en un choque

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento conduce a

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$$

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

donde las  $u$  representan las velocidades antes del choque y las  $v$  después.

En el choque elástico, esta ecuación debería combinarse con la conservación de la energía; no obstante es preferible utilizar el coeficiente de restitución que se define como

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} ,$$

es decir, la relación entre las velocidades relativas de alejamiento y aproximación. Este coeficiente vale 0 para el choque perfectamente inelástico y 1 para el elástico. En los choques normales está comprendido entre ambos valores.

## 2.2. Electricidad

Otro campo de análisis entra en el dominio de la electricidad. Los coches van movidos por un motor eléctrico que toma la energía eléctrica del enrejado del techo. Las ruedas metálicas de los vehículos hacen tierra con la base metálica de la pista. En principio no significa un peligro para los usuarios que deambulan por ella puesto que no cierran el circuito.

También puede analizarse por qué el trole despide chispas y los fenómenos asociados a las constantes rupturas –contacto del trole con el enrejado de alimentación–.

## 2.3. Teoría cinética

En su movimiento por la pista, los coches pueden ser una aproximación del movimiento de las moléculas de un gas, incluso en el aspecto geométrico que lleva considerar que la superficie real de pista de la que disponen los coches para moverse, es la de la pista menos su propia superficie, lo que permite una comparación con el término " $b$ " de la conocida ecuación de van der Waals.

$$\left( p + \frac{a}{v^2} \right) (V - b) = RT$$

### 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

Los coches de choque de la atracción *el Templo Perdido* tienen una masa de 100 kg a la que hay que añadir la de los tripulantes, es decir, un total de unos 250 kg. Estos vehículos se mueven, siempre según la propia empresa, a una velocidad de 16 km/h  $\cong$  4,5 m/s. Lo que da una cantidad de movimiento de unos 1.100 kg. m s<sup>-1</sup>.

Un primer ejercicio práctico puede ser verificar el dato.

Se debe hacer notar que la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial y, aunque se conserve en los choques, lo hace de modo vectorial, no modular. Otro aspecto interesante es el cálculo aproximado del choque contra las paredes de la pista. Obsérvese que en este caso sí intervienen fuerzas exteriores sobre el coche, debidas a la reacción del bordillo. Estas fuerzas serán perpendiculares al bordillo de modo que la componente horizontal de la cantidad de movimiento prácticamente permanecerá constante, mientras que la vertical cambiará. Si se supone un choque perfectamente elástico, deberá conservarse la energía cinética y, en consecuencia, la componente vertical de la velocidad después del choque, en módulo, deberá ser igual a la incidente.

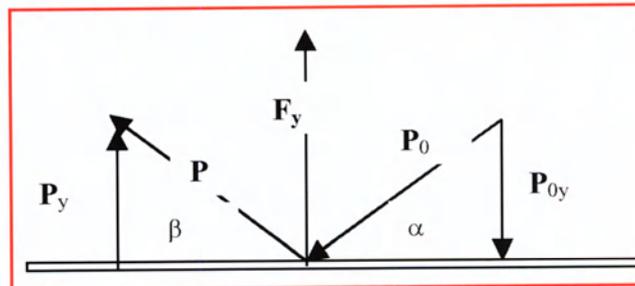


Figura 2. Diagrama vectorial del rebote contra el borde

En términos algebraicos debe cumplirse que

$$\frac{1}{2} m v_{0y}^2 = \frac{1}{2} m v_y^2 \Rightarrow v_y = \pm v_{0y} \Rightarrow \alpha = \beta$$

En consecuencia,  $F_y = \Delta p_y = m(v_y - v_{0y}) = -2mv_{0y}$

### 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

Aunque con programas más avanzados que la hoja de cálculo, como Matlab, o simplemente realizando un programa en un lenguaje de programación como Basic, Visual Basic, Pascal o C en cualquiera de sus variantes, se puede simular muy adecuadamente, incluso de forma dinámica, el movimiento de los coches. Pero utilizando solamente la hoja de cálculo como única herramienta informática, no se ha encontrado una simulación sencilla. La cuestión queda abierta.

# Siete Picos

## 1. IDEAS BÁSICAS

Es la típica *Montaña Rusa*.

En esta atracción es importante observar cómo prácticamente se conserva la energía a lo largo de toda su trayectoria; sólo existen algunas pérdidas por rozamiento, que por su sencillez se despreciarán.



## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

Un ejercicio es analizar las fuerzas que el viajero siente en la trayectoria (Figuras 1 y 2).

En los valles la concavidad de las curvas es hacia arriba, por lo que las fuerzas actuantes deben dar una resultante centrípeta hacia arriba, de modo que

$$m \frac{v^2}{r} = R - mg ,$$

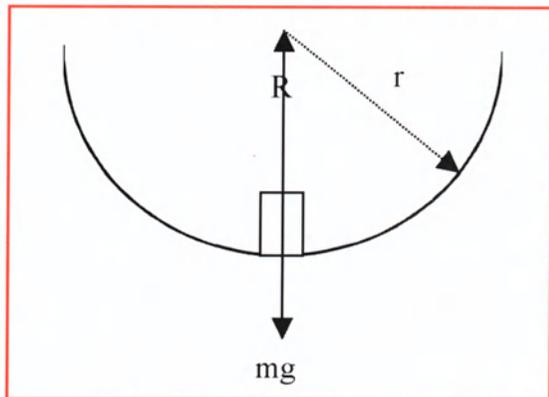


Figura 1. Diagrama de fuerzas en un valle

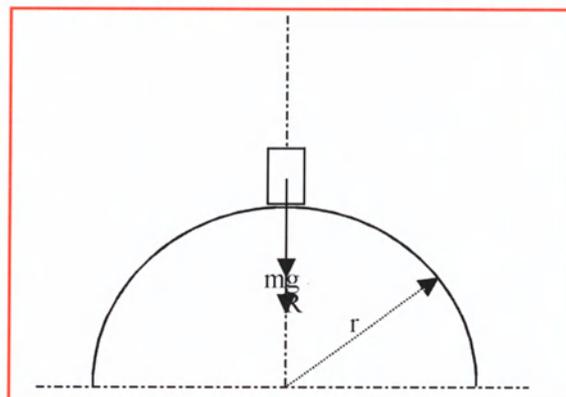


Figura 2. Diagrama de fuerzas en un pico

siendo  $v$  la velocidad de la cápsula,  $r$  el radio de curvatura del valle y  $R$  la fuerza de reacción del carril sobre la cápsula. En consecuencia, el viajero siente que se pega al asiento.

En las crestas, no obstante, ocurre al revés; entonces el viajero siente que se separa del asiento. Además la sensación disminuye puesto que la velocidad es menor dado que al ser mayor la energía potencial, ya que la energía total debe conservarse, será menor la cinética y, en consecuencia, la velocidad.

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2$$

Tal vez sea más intuitivo razonar en términos de lo apreciado por el observador no inercial<sup>4</sup>. En este caso, cuando está en el fondo del valle, la fuerza centrífuga y el peso, que son las fuerzas que siente el viajero, van en el mismo sentido, ambas hacia abajo y le pegan al asiento. En la cresta, en cambio, mientras que el peso sigue hacia abajo, la fuerza centrífuga va hacia arriba, y en consecuencia tiende a “despegar” al viajero.

Lo dicho puede experimentarse con un dinamómetro y una masa suspendida del mismo. Se observará cómo en los valles la masa es más pesada y en las crestas más ligera.

Este sencillo experimento puede conducir a reflexionar sobre la diferencia existente entre “peso” y “masa”, así como entre “masa inerte” y “masa gravitatoria”.

En algunas de estas atracciones es posible “rizar el rizo”<sup>5</sup> de modo que los viajeros quedan con la “cabeza abajo”, sin que se les caigan los objetos de los bolsillos.

Para ello es preciso que los cochecitos pasen por el punto más alto de la trayectoria con una velocidad mínima suficiente para que la “inercia pueda más” que el peso del viajero o del objeto.

Es decir, si  $v$  es la velocidad del cochecito

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \Rightarrow v \geq \sqrt{Rg}$$

donde  $v$  es la velocidad y  $R$  el radio descrito por el móvil<sup>6</sup>.

Puede calcularse también la mínima altura desde la que debe lanzarse el cochecito para que al llegar al punto crítico mantenga un remanente de velocidad suficiente que garantice que podrá pasar por él sin problemas. Este caso se analiza en la atracción *el Tornado*.

Estas ideas pueden extrapolarse a lo que siente un aviador acrobático en sus maniobras. Es probable que los estudiantes aficionados a la aeronáutica hayan oído o leído que en determinadas maniobras: salidas de un picado pronunciado, rizados o toneles, los pilotos experimenten aceleraciones de “varios  $g$ ”. Puede aplicarse entonces la semejanza con lo experimentado en las montañas rusas y comentar, por una parte, la expresión “varios  $g$ ” y por otra parte sus causas: cambios bruscos de velocidad o giros violentos; y efectos: mayor peso de las manos y por tanto dificultad de moverlas, e incluso fallos de riego sanguíneo al cerebro que traen como consecuencia pérdidas momentáneas de la consciencia (“black out”, en la jerga aviatoria), que han sido motivo de muchos accidentes graves.

### 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

Según la empresa, a *la Montaña Rusa* se asciende por una rampa de 46 m hasta una altura de de 15 m, traccionada por un motor de una potencia de 30 kW. La masa del conjunto es de 70 Tm.

---

<sup>4</sup> Al respecto, vale lo dicho antes, debe tenerse sumo cuidado en no confundir al estudiante.

<sup>5</sup> Ver el análisis de la atracción *el Tornado*.

<sup>6</sup> En rigor es precisa una corrección al radio debido al carácter no puntual del carrito, modo que debe tomarse el radio de la curva realmente descrita por su centro de masas.

Una primera cuestión que hay que plantearse puede ser la máxima velocidad que adquiere el carrito.

Este parámetro puede calcularse por una balance energético de modo que  $E_c \leq E_{p0} = Mgh_0 = 147M$  y de ahí

$$v_{\max} \leq \sqrt{2gh_{\max}} = 17,15 \text{ ms}^{-1}$$

Otro aspecto muy formativo es el estudio de las fuerzas en la tracción sobre el plano inclinado y la verificación del dato de la potencia midiendo el tiempo que tarda el vehículo en subir la rampa y comparando con el necesario según los datos, es decir, 147M.

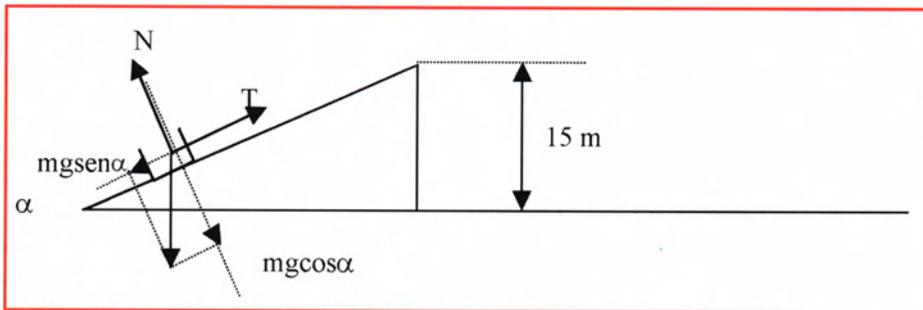


Figura 3. Esquema de fuerzas (sin rozamiento) en el plano inclinado.

#### 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

La hoja de cálculo se ha utilizado para reconstruir lo que ocurre en un tramo arbitrario de la Montaña Rusa (Figura 4). Para ello, se ha programado una sección de la misma que por sencillez corresponde a dos sectores circulares de curvatura inversa y yuxtapuestos, y se han calculado en cada instante las respectivas energías cinética y potencial, mediante el típico balance energético.

$$E_T = E_c + E_p$$

Conocida la energía cinética, la velocidad se calcula como  $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$

El cálculo de la fuerza centrípeta y de su correspondiente aceleración es sencillo ya que  $a_c = v^2/R$  y estos datos son conocidos.

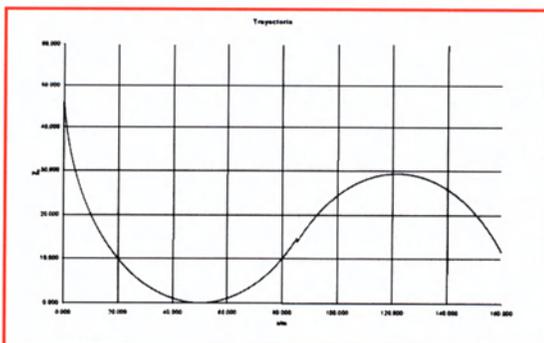


Figura 4. Perfil de la pista

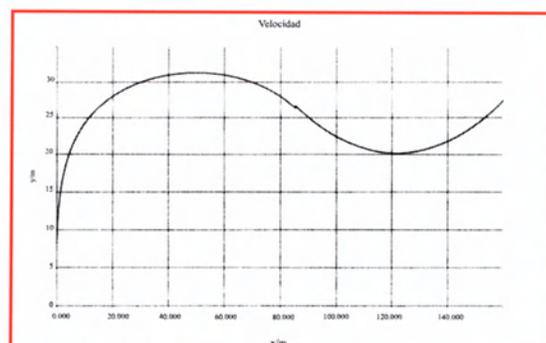


Figura 5. Perfil de velocidad

En otra columna se calculan las componentes de la "aceleración que experimenta el viajero", observándose que ésta es máxima en el fondo del valle y mínima en la cima.

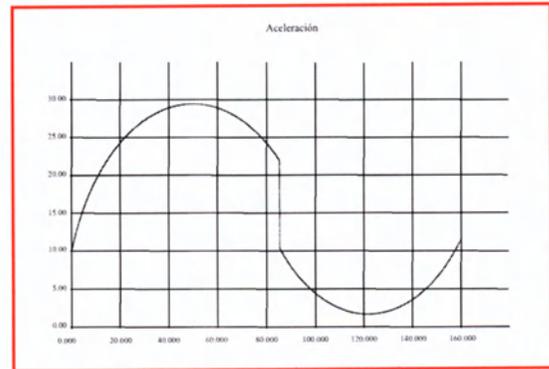


Figura 6. Perfil de aceleración

## Los Rápidos

### 1. IDEAS BÁSICAS

#### 1.1. Mecánica

En esta atracción se combina la Mecánica con la Hidro-dinámica.

Se trata del movimiento de unas barquitas en un canal de agua impulsada.

Una primera cuestión que cabría preguntarse es si el barquito está en reposo respecto al agua.

Realmente hay movimiento relativo entre agua y buque, aunque la mayor parte del movimiento del agua respecto al buque es oscilatorio.

Será importante pues fijar un sistema de referencia: o bien el agua o bien la orilla. Respecto a cada uno cabe preguntarse:

- ¿Es inercial o no?
- ¿Cuánto vale la velocidad del barco respecto a cada uno de ellos?
- ¿Se puede hablar de conservación de la energía mecánica? ¿De cuántas formas se disipa energía?



#### 1.2. Hidrostática : flotabilidad y equilibrio en cuerpos flotantes

Como es obvio cabe hablar del principio de Arquímedes y de las condiciones de flotabilidad de los barcos.

Como es sabido, para que un objeto flote en un fluido es necesario que desplace un peso de fluido igual al suyo propio.

Si el peso de fluido desplazado es menor que el del objeto (lo que equivale a decir que su densidad media es mayor que la del fluido), éste se hunde, aunque presenta un peso aparente igual a su propio peso menos el del fluido desplazado.

Si ambos pesos, el del objeto y el del fluido son iguales, el objeto queda “entre dos aguas” y su peso aparente es nulo.

Si el peso del fluido desplazado es mayor que el del objeto, este “flota”, de modo que emerge hasta que queda sumergida una parte tal que el volumen desplazado es igual al peso total del objeto flotante<sup>7</sup>.

Otro tema es el equilibrio de los cuerpos flotantes. Efectivamente, no basta con que un navío flote, debe hacerlo en posición adecuada, “con el puente arriba y la quilla abajo”. Para la explicación de correcto equilibrio del navío se recordará la existencia de tres puntos notables (Figura 1):

- Centro de masas del barco.
- Centro de flotación, que coincide con el centro de masas de la parte sumergida del barco.
- Metacentro, punto de intersección del eje de simetría del barco con la vertical que pasa por el centro de flotación.

Para que el barco esté en equilibrio, ambos centros deben estar sobre la misma vertical. Para que el equilibrio sea estable, es necesario que, cuando el barco se separa del equilibrio, aparezca un par que tienda a adrizar el barco, es decir, a devolverle a la posición vertical. Para ello, es necesario y suficiente que el metacentro se encuentre por encima del centro de masa, de modo que se origina un par de fuerzas, peso-empuje que tiende a llevar el barco a su posición inicial. En caso contrario, ocurre que el par que se genera induce a aumentar la escora del barco y, en consecuencia, a volcarlo<sup>8</sup>.

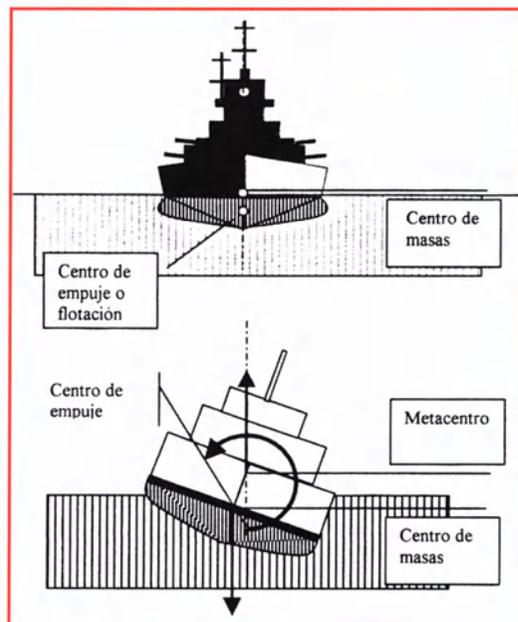


Figura 1. Metacentro y par metacéntrico

Obsérvese que el centro de masas del barco depende de su forma y de la forma en que se distribuyen las masas en él y, por tanto, en principio no debe cambiar con el movimiento del barco. Sin embargo, el metacentro cambia debido a la forma de la carena del buque y los barcos pueden volcar, cosa que no ocurre con un tronco cilíndrico. (¿Por qué?).

<sup>7</sup> Conviene recordar a los alumnos, aunque sean de tierra adentro, que la forma habitual en náutica de dar el tamaño de un navío es por su desplazamiento y que este suele darse “en rosca” con el buque vacío pero listo para navegar y máximo, es decir cargado completamente. Se puede preguntar a los estudiantes que justifiquen cuál será mayor.

<sup>8</sup> Aquí se habla del equilibrio en el sentido transversal. El equilibrio en el eje longitudinal (popa -proa) también es interesante, pero sale del propósito de este trabajo. Puede recordarse que muchas veces los barcos se hunden no porque embarquen una cantidad de agua excesiva, sino porque se desequilibran y vuelcan o zozobran, recuérdense las imágenes bélicas de buques torpedeados.

### 1. 3. Hidrodinámica

Aunque la Hidrodinámica propiamente dicha escapa de los planes de estudio de Enseñanza Secundaria, no está de más una breve disquisición sobre el tema.

Como es sabido, un fluido puede circular en régimen laminar y en régimen turbulento.

En el primer caso no existe mezcla de líneas de corriente. Estas líneas, trayectorias imaginarias que siguen las distintas partículas en su movimiento no se cortan, no hay vórtices ni torbellinos.

En el régimen turbulento, sin embargo, las líneas de corriente se entrecruzan y aparecen torbellinos.

La descripción cuantitativa del régimen viene dada por una magnitud adimensional, llamada número de Reynolds que se define como:

$$Re = \frac{Lv\rho}{\eta}$$

donde  $L$  es una longitud relacionada con el canal,  $v$  es la velocidad del fluido,  $\rho$  es su densidad y  $\eta$  la viscosidad.

Esta última magnitud representa la fricción entre las distintas capas del fluido cuya unidad en el Sistema Internacional de Unidades es  $\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$ , aunque lo habitual es utilizar la unidad c.g.s. poise =  $\text{g s}^{-1} \text{cm}^{-1}$  o, más corrientemente, su centésima parte, la centipoise,  $1 \text{ cp} = 10^{-3} \text{ kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$ . La viscosidad del agua es 1 cp.

Se admite que un número de Reynolds  $Re < 2.000$  indica régimen laminar y  $Re > 10.000$  turbulento los valores intermedios indican una situación de transición.

Por otra parte, es interesante observar que en las proximidades de las paredes de la barca o del canal, la fricción del agua con aquéllas disminuye la velocidad, de modo que existe una zona más o menos ancha en las que el flujo es laminar; se la llama capa límite. Al alejarse del borde en general aparece un régimen turbulento.

Otra consecuencia de la viscosidad y de los regímenes de circulación es la formación de estelas.

Las interacciones de todo tipo entre el barco y el agua, especialmente la forma de las capas límites y de las estelas, están altamente influidas por la forma de la carena del obstáculo.

Todos estos temas que se han apuntado muy sucintamente, pueden desarrollarse observando el agua del canal y el movimiento de pequeñas partículas flotantes que invariablemente existen.

Finalmente puede discutirse de dónde proviene y en qué formas se disipa la energía en las barcas.

## 2. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

La atracción discurre por un canal de unos 600 m por el que circula un caudal de agua de unos 5.000 l/s.

Si se conoce la sección del canal, es posible determinar la velocidad del agua aplicando la ecuación de continuidad  $Q = sv$ , de modo que  $v = Q/s$ .

Una primera observación cualitativa permite comprobar que en los "pasos estrechos" la velocidad del agua es mayor.

Obsérvese que la velocidad del agua es en general alta, lo que significa que su régimen es turbulento. Los obstáculos contribuyen a aumentar este régimen.

También puede observarse la estela de los objetos fijos; en cambio, las barcas, al tener poco movimiento relativo respecto al agua, dejan muy poca estela a pesar de su forma poco hidrodinámica.

La forma de estos burlotes muy baja y ancha, es decir, centro de gravedad muy bajo y par metacéntrico grande, garantizan que, a pesar de moverse en un régimen muy turbulento, no haya peligro de volcado.

El calado de los burlotes, dada la forma prácticamente cilíndrica de estos, es fácil de calcular igualando el peso del burlote con su carga al volumen desalojado

$$\frac{\pi D^2 \rho h g}{4} = (M_0 + nm)g \Rightarrow h = \frac{4(M_0 + nm)}{\rho \pi D^2} = \frac{4(1300 + 70n)}{16000\pi}$$

donde  $n$  es el número de viajeros, estimando en 70 kg su masa respectiva y aceptando los datos de la empresa. Se puede mejorar la estimación atribuyendo a los niños una masa de 35 kg, e incluso, distinguiendo hombres de mujeres.

Obsérvese que la densidad del agua se toma en unidades del Sistema Internacional de Unidades.

## 3. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

Se trata de resolver el problema anterior y comprobar que el calado de los burlotes es proporcional al número de viajeros.

Para ello se prepara una hoja con el correspondiente encabezamiento de datos en los que figura:

- Masa del burlote.
- Masa media y número de los viajeros.
- Diámetro del burlote.

Se preparan las columnas correspondientes al número de viajeros, la masa total del burlote, su peso y la altura.

Se calcula el peso en columna aparte, siempre rotulada con la unidad correspondiente para destacar, una vez más, la diferencia que existe entre masa y peso.

Las respectivas fórmulas informáticas son:

$$m(\text{kg}) = B^2 * A + A^2$$

$$\text{peso}(N) = B * 9,8$$

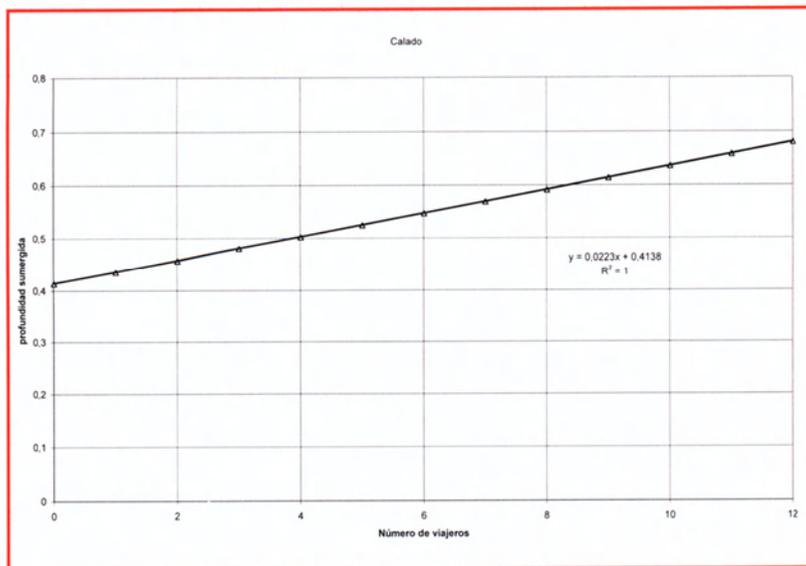
$$h(m) = 4 * C^4 / (\pi * C^2 * 9,8) / 1000.$$

Con estos datos se construye la correspondiente gráfica, calado frente a número de viajeros, en la que se observa cómo los puntos están perfectamente alineados. Es decir, hay una proporcionalidad entre el aumento de calado (obsérvese que se trata de una función afín) y el número de viajeros.

Si se inserta la línea de tendencia se observa que la ecuación es:

$$h = 0,0223n + 0,4138 \text{ con un coeficiente } R^2 = 1,$$

es decir, perfecta correlación.



**Figura 2.** Representación del calado frente al número de viajeros

La ordenada en el origen corresponde al calado del burlote vacío.

Otro ejercicio interesante es observar cómo influye el diámetro de la barca; para ello, se fija un número de viajeros en el ejemplo burlote vacío y se varían los radios.

La gráfica demuestra que no existe proporcionalidad. Sin embargo, si se representa el calado frente a  $1/D^2$  de nuevo se obtiene una línea de tendencia que pasa por el origen, lo que prueba que, en este caso, el calado es inversamente proporcional al diámetro al cuadrado (como es obvio, y puede ser objeto de ejercicio didáctico con los estudiantes, también lo es al radio al cuadrado).

Microsoft Excel - Rápido

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana

F13

|    | A     | B                       | C          | D | E | F | G | H | I |
|----|-------|-------------------------|------------|---|---|---|---|---|---|
| 1  | mo/kg |                         |            |   |   |   |   |   |   |
| 2  |       | 1300                    |            |   |   |   |   |   |   |
| 3  | D/m   | 1/D <sup>2</sup> /m(-2) | h          |   |   |   |   |   |   |
| 4  | 2     | 0,25                    | 0,41380285 |   |   |   |   |   |   |
| 5  | 2,05  | 0,2379536               | 0,39386351 |   |   |   |   |   |   |
| 6  | 2,1   | 0,22675737              | 0,37533139 |   |   |   |   |   |   |
| 7  | 2,15  | 0,21633315              | 0,3580771  |   |   |   |   |   |   |
| 8  | 2,2   | 0,20661157              | 0,34198583 |   |   |   |   |   |   |
| 9  | 2,25  | 0,19753086              | 0,32695534 |   |   |   |   |   |   |
| 10 | 2,3   | 0,18903592              | 0,31289441 |   |   |   |   |   |   |
| 11 | 2,35  | 0,18107741              | 0,2997214  |   |   |   |   |   |   |
| 12 | 2,4   | 0,17361111              | 0,28736309 |   |   |   |   |   |   |
| 13 | 2,45  | 0,16659725              | 0,27575367 |   |   |   |   |   |   |
| 14 | 2,5   | 0,16                    | 0,26483383 |   |   |   |   |   |   |
| 15 | 2,55  | 0,153787                | 0,25455001 |   |   |   |   |   |   |
| 16 | 2,6   | 0,14792899              | 0,24485376 |   |   |   |   |   |   |
| 17 | 2,65  | 0,14239943              | 0,23570116 |   |   |   |   |   |   |
| 18 | 2,7   | 0,13717421              | 0,22705232 |   |   |   |   |   |   |
| 19 | 2,75  | 0,1322314               | 0,21887093 |   |   |   |   |   |   |
| 20 | 2,8   | 0,12755102              | 0,2111239  |   |   |   |   |   |   |
| 21 | 2,85  | 0,1231148               | 0,20378103 |   |   |   |   |   |   |
| 22 | 2,9   | 0,11890606              | 0,19681467 |   |   |   |   |   |   |
| 23 | 2,95  | 0,11490951              | 0,19019953 |   |   |   |   |   |   |
| 24 | 3     | 0,11111111              | 0,18391238 |   |   |   |   |   |   |

Gráfico1 Hoja1 Gráfico3 Hoja2 Hoja3

Dibujo Autoformas

Listo NUM

Como puede observarse de la ecuación de la línea de tendencia

$$h = 1,6552(1/D^2), \text{ con } R^2 = 1.$$

Puede ser formativo ensayar varias posibilidades y que sean los alumnos quienes deduzcan la mejor representación. Esta es una forma de investigación científica que no debe desaprovecharse.

También puede simularse el perfil de velocidades en el canal; en el caso más simple, un canal perfectamente regular, el perfil de velocidades presenta una forma semejante a las representadas en la Figura 5.

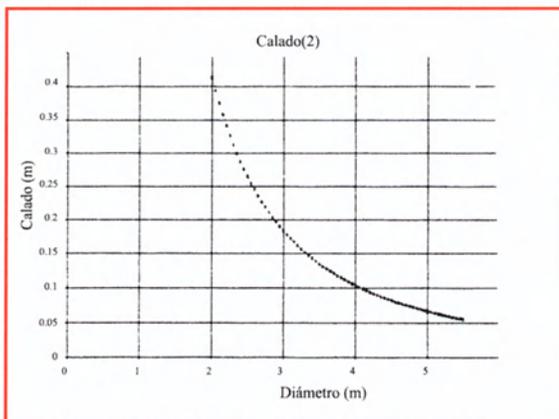


Figura 3. Calado frente a diámetro

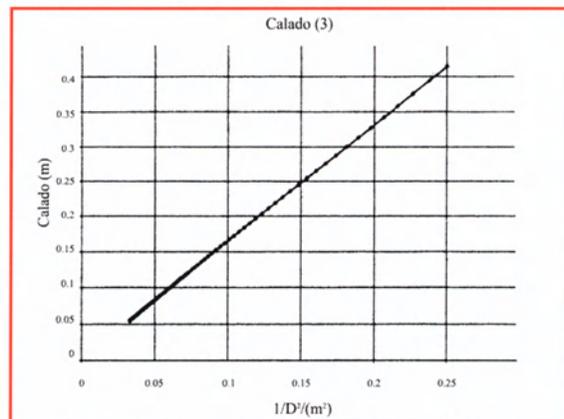


Figura 4. Calado frente a (diámetro)<sup>-2</sup>

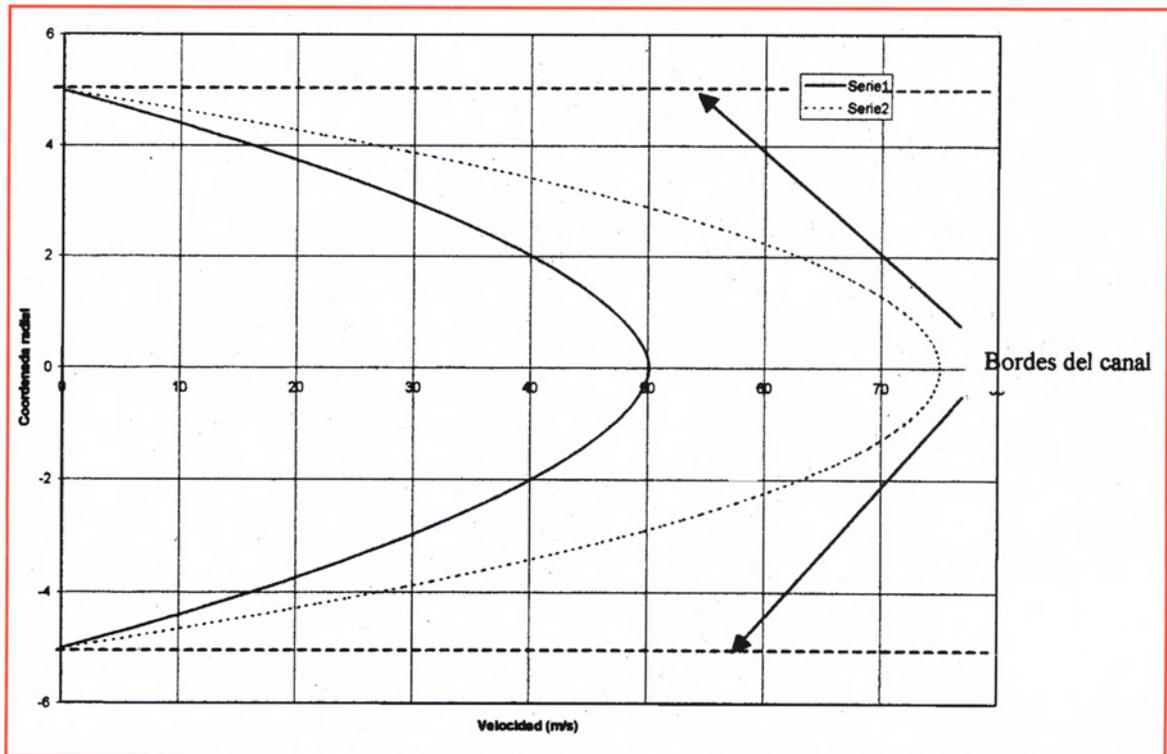


Figura 5. Perfiles de velocidad en dos regímenes distintos de circulación

## La Lanzadera

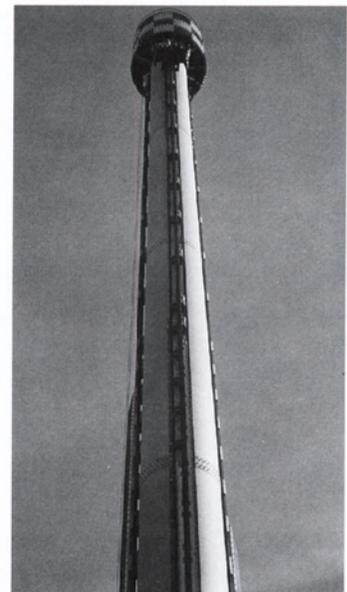
### 1. IDEAS BÁSICAS

Consiste en una caída libre controlada, por tanto, es una buena herramienta para el estudio de:

- La caída libre.
- El balance energético.
- El frenado en la caída.

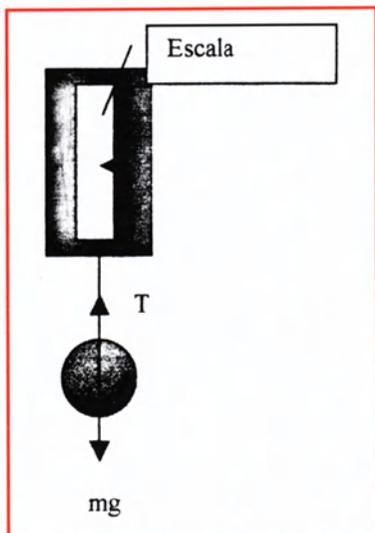
### 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

El recorrido de la cápsula con los viajeros tiene dos tramos claramente determinados (Figura 2). En el primero debe considerarse que el coche cae prácticamente en caída libre; en el segundo, el vehículo se detiene. Un tripulante del mismo lo puede comprobar con un dinamómetro de bolsillo del que suspende una masa cualquiera que servirá de testigo.

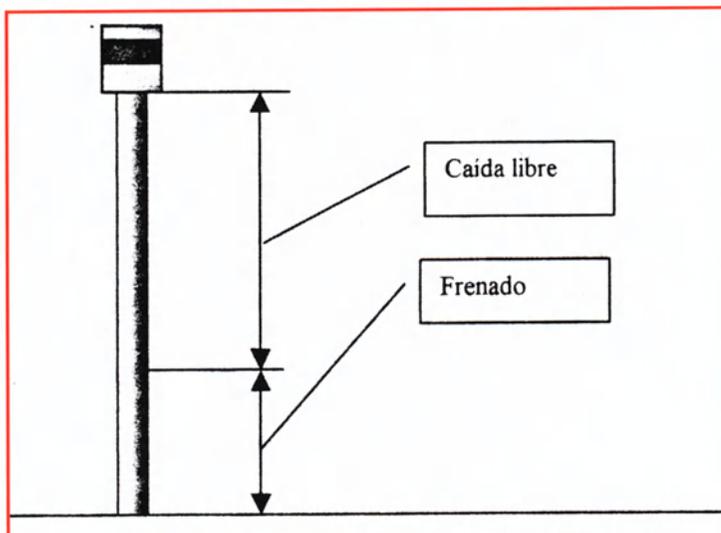


Antes de iniciar la caída, tomará nota del peso (insístase en la diferencia entre peso y masa) que registra.

Hará lo mismo durante la caída e intentará determinar cuándo empieza a frenar.



**Figura 1.** *Dinamómetro y diagrama de cuerpo libre del objeto testigo*



**Figura 2.** *Esquema de la lanzadera*

Un diagrama de cuerpo libre (Figura 1) aplicado a la masa suspendida permite escribir que  $T - mg = ma$ , siendo  $T$  la tensión que es lo que registra el dinamómetro,  $m$  la masa del cuerpo,  $g$  la aceleración de gravedad y  $a$  la aceleración.

Despejando  $T = m(a + g)$ .

Considerando, en todo caso, el sentido positivo hacia arriba y el negativo hacia abajo.

Si el cuerpo sube o baja con movimiento uniforme, entonces  $a = 0$  y el dinamómetro registra el peso en reposo. Si sufre aceleración hacia arriba<sup>9</sup>  $a > 0$  y  $T > \text{Peso}$ , si hacia abajo  $a < 0$  y  $T < \text{peso}$ .

Si el cuerpo cae en caída libre  $a = -g$  y  $T = 0$ . En consecuencia, cuando el coche cae en caída libre, el dinamómetro registrará prácticamente cero y en el momento de la frenada un valor mayor que el peso en reposo. La oscilación de la lectura permitirá comprobar si la aceleración es constante.

Un observador que ve el coche caer desde el exterior puede calcular el tiempo de caída total y los tiempos parciales de caída libre y frenada, y aplicar las ecuaciones correspondientes.

<sup>9</sup> Una de las dudas que surge en la enseñanza de la Física elemental es el signo de las magnitudes. En Cinemática y Dinámica la confusión puede venir de considerar lo que una "posición" respecto a un origen arbitrario, como un "espacio recorrido". Si se insiste desde el primer momento en el carácter de posición que tienen las ecuaciones de la Cinemática, muchas dudas sobre el signo, que ahora es simplemente un sentido también arbitrario, quedan disipadas.

En este trabajo se considera siempre positivo hacia arriba y negativo hacia abajo, positivo hacia la derecha, negativo hacia la izquierda.

Un balance energético, tomado como referencia el punto más alto con el punto más bajo, permite el cálculo de la fuerza media de frenado de un modo cómodo.

Así:

$$MgH = F_f L ;$$

siendo  $M$  la masa del vehículo,  $H$  la altura total de la atracción y  $L$  la longitud de la zona de frenado.

Las ecuaciones fundamentales del sistema son en consecuencia:

para la caída libre

$$y = y_0 - gt^2 / 2$$
$$v = - gt$$

en el tramo de frenado

$$y = y_c - v_c (t - t_c) + a (t - t_c)^2 / 2$$
$$v = - v_c + a (t - t_c)$$

donde el subíndice  $c$  indica las magnitudes finales en el tramo de caída libre y  $a$  es la aceleración de frenado, los signos se incluyen en las ecuaciones, que pueden determinarse como

$$a = (v_c)^2 / (2l)$$

siendo  $l$  la longitud de la zona de frenado<sup>10</sup>.

### 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

Los datos técnicos indican una altura de caída de 60 m con un tiempo de caída de 3 s y un frenado en 10 m. Verificar la coherencia de los datos con las hipótesis es inmediato, basta con aplicar las ecuaciones y comprobar la consistencia de los resultados.

Para ello se ha utilizado la hoja de cálculo Excel. Como siempre se ha definido un origen de coordenadas, la base de la torre y un criterio de signos, positivo hacia arriba y negativo hacia abajo<sup>11</sup>.

### 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

Se ha preparado una hoja, siguiendo el patrón general, es decir, dejando fuera de la zona de cálculo los parámetros, a fin de poder modificarlos fácilmente.

---

<sup>10</sup> Dentro de la idea “antifórmula” de los autores, estas ecuaciones se incluyen como recordatorio para el profesor, no para que las utilicen, acriticamente los estudiantes.

<sup>11</sup> Se insiste una vez más en la importancia de resaltar, desde los primeros estadios de aprendizaje de la Física, que las ecuaciones de la cinemática son de posición y no de espacio recorrido.

Siempre todos los datos vendrán rotulados con sus correspondientes unidades.

Se ha preparado, pues, la zona de datos que incluye:

- $H_0$  altura de caída.
- $H_f$  altura de frenado.
- $m$  masa.
- $ac$  aceleración de caída libre.
- $dt$  incremento temporal.
- $af$  aceleración de frenado.
- $dt'$  incremento temporal en el tiempo de frenado que se introduce por comodidad de cálculos en la última fase.

Se preparan las columnas de tiempo, posición, velocidad energía cinética, potencial y total.

|    | A          | B          | C           | D          | E                      | F                     | G          | H | I |
|----|------------|------------|-------------|------------|------------------------|-----------------------|------------|---|---|
| 1  | H0 (m)     | Hf(m)      | dt          | m(kg)      | ac (m/s <sup>2</sup> ) | af(m/s <sup>2</sup> ) | dt(2)      |   |   |
| 2  | 60         | 10         | 0,01064794  | 1500       | -9,8                   | 48,9999989            | 0,01847731 |   |   |
| 3  | t(s)       | y(m)       | V(m/s)      | Ec(J)      | Ep(J)                  | Et(J)                 |            |   |   |
| 4  | 0          | 60         | 0           | 0          | 882000                 | 882000                |            |   |   |
| 5  | 0,01064794 | 59,9994444 | -0,10434984 | 8,16666663 | 881991,833             | 882000                |            |   |   |
| 6  | 0,02129589 | 59,9977778 | -0,20869968 | 32,6666665 | 881967,333             | 882000                |            |   |   |
| 7  | 0,03194383 | 59,995     | -0,31304952 | 73,4999997 | 881926,5               | 882000                |            |   |   |
| 8  | 0,04259177 | 59,9911111 | -0,41739935 | 130,666666 | 881869,333             | 882000                |            |   |   |
| 9  | 0,05323971 | 59,9861111 | -0,52174919 | 204,166666 | 881795,833             | 882000                |            |   |   |
| 10 | 0,06388766 | 59,98      | -0,62609903 | 293,999999 | 881706                 | 882000                |            |   |   |
| 11 | 0,0745356  | 59,9727778 | -0,73044887 | 400,166665 | 881599,833             | 882000                |            |   |   |
| 12 | 0,08518354 | 59,9644444 | -0,83479871 | 522,666664 | 881477,333             | 882000                |            |   |   |
| 13 | 0,09583148 | 59,955     | -0,93914855 | 661,499997 | 881338,5               | 882000                |            |   |   |
| 14 | 0,10647943 | 59,9444444 | -1,04349839 | 816,666663 | 881183,333             | 882000                |            |   |   |
| 15 | 0,11712737 | 59,9327778 | -1,14784823 | 988,166663 | 881011,833             | 882000                |            |   |   |
| 16 | 0,12777531 | 59,92      | -1,25219806 | 1176       | 880824                 | 882000                |            |   |   |
| 17 | 0,13842326 | 59,9061111 | -1,3565479  | 1380,16666 | 880619,833             | 882000                |            |   |   |
| 18 | 0,1490712  | 59,8911111 | -1,46089774 | 1600,66666 | 880399,333             | 882000                |            |   |   |
| 19 | 0,15971914 | 59,875     | -1,56524758 | 1837,49999 | 880162,5               | 882000                |            |   |   |
| 20 | 0,17036708 | 59,8577778 | -1,66959742 | 2090,66666 | 879909,333             | 882000                |            |   |   |
| 21 | 0,18101503 | 59,8394444 | -1,77394726 | 2360,16666 | 879639,833             | 882000                |            |   |   |
| 22 | 0,19166297 | 59,82      | -1,8782971  | 2645,99999 | 879354                 | 882000                |            |   |   |
| 23 | 0,20231091 | 59,7994444 | -1,98264694 | 2948,16665 | 879051,833             | 882000                |            |   |   |
| 24 | 0,21295885 | 59,7777778 | -2,08699677 | 3266,66665 | 878733,333             | 882000                |            |   |   |
| 25 | 0,2236068  | 59,755     | -2,19134661 | 3601,49998 | 878398,5               | 882000                |            |   |   |

El incremento de tiempo se fija arbitrariamente, por ejemplo 0,01 s y se llena la columna de tiempos hasta aproximadamente los 3 minutos; en este caso, hasta la celda A304. Como es de esperar que las medidas de longitudes sean más exactas que las temporales, se toman estas como datos ciertos.

Se procede ahora a programar la columna de posición con las ecuaciones tradicionales, es decir,  $y = H_0 + ac*t^2/2$  y  $V = ac*t$ . Obsérvese que por aceleración de caída se ha tomado  $ac = -9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

Se programan también las correspondientes energías. Téngase presente que la energía potencial es  $E = -mg$ , por coherencia con los criterios de signo y origen de coordenadas.

Se observa que para un tiempo de 3 s la altura no es de 10 m sino algo mayor, por lo que se procede a ajustar el problema con la herramienta de la hoja *solver*<sup>12</sup>. Dado el modo de operación de esta herramienta, se optará por imponer, por ejemplo, que la celda B304 sea cero cambiando el  $dt$ . El resultado es 3,2 s, perfectamente coherente pues con los datos suministrados por la empresa.

Corresponde ahora preparar la segunda fase del problema, el frenado.

Para ello, se introduce una aceleración de frenado arbitraria y se extiende el tiempo con el nuevo incremento, unos cien lugares más.

Se programan las ecuaciones de posición y velocidad considerando ahora los nuevos parámetros. La velocidad inicial será la que llevaba la cápsula a una altura de 10 m, la aceleración será la de frenado y el tiempo se referirá al tiempo en que empezó el frenado, es decir, a A304.

Con *solver* se exigirá que en una determinada celda,  $y = 0$  ó  $V = 0$ , variando la aceleración y el incremento  $dt'$  y con la restricción de que la celda homóloga también sea cero<sup>13</sup>. Es conveniente restringir el valor de  $dt'$ , por ejemplo, por debajo de 0,1

Excel da una solución para  $t = 3,83$  s, que es el tiempo total de toda la caída.

Muy ilustrativas son las representaciones gráficas posición-tiempo; velocidad- tiempo y energía-tiempo (Figuras 3 a 5).

En la primera, se observa un claro punto de inflexión correspondiente a  $t = 3,2$  s. que se explica claramente por el carácter de la aceleración, negativo (hacia abajo) en el primer tramo de caída libre, y positivo (hacia arriba) en el segundo de frenado.

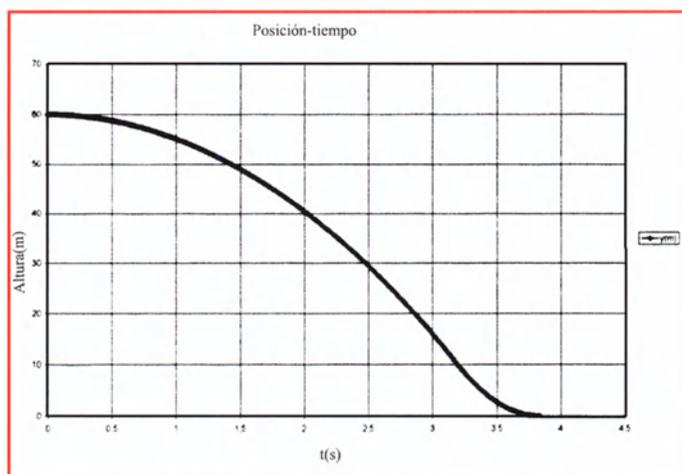


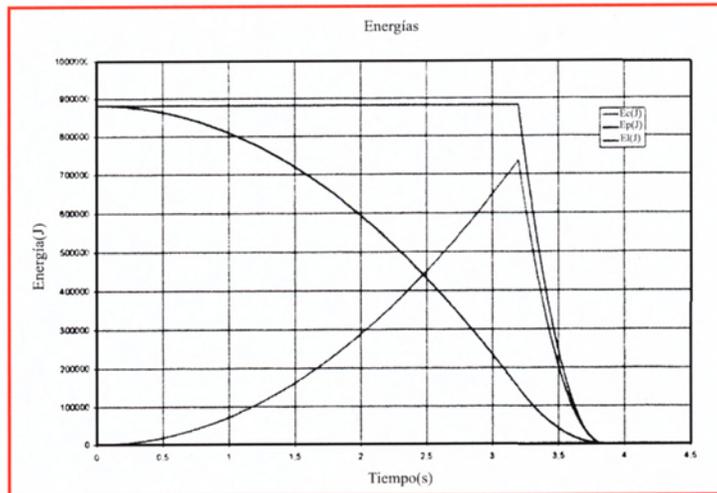
Figura 3. Diagrama posición tiempo

<sup>12</sup> La herramienta *solver*, en síntesis, ajusta un valor predeterminado, o maximiza o minimiza una fórmula escrita en una determinada celda, sometida a un conjunto de restricciones que pueden definirse por el usuario mediante una serie de ensayos combinando el contenido de algunas celdas designadas también por el usuario.

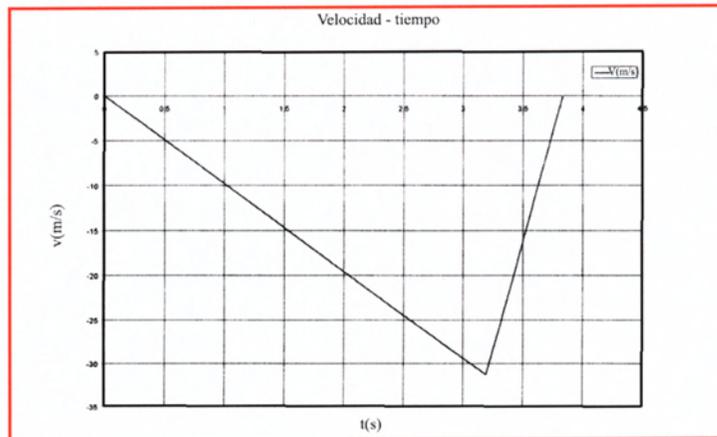
<sup>13</sup> Ver nota anterior.

En el diagrama velocidad tiempo se observa un punto de no derivabilidad, que corresponde al cambio de régimen, caída-frenado y coincide con el punto de inflexión anterior.

En el gráfico de energías se observa cómo la energía total es constante en el tramo de caída libre para dejar de serlo en el tramo de frenado. La pregunta para los estudiantes es obvia ¿por qué? y ¿qué ocurre con la energía disipada?



**Figura 4.** Diagrama de energías



**Figura 5.** Diagrama velocidad tiempo

# Los Fiordos

## 1. IDEAS BÁSICAS

En esta atracción una barcaza es lanzada desde lo alto de una rampa cayendo sobre una especie de estanque. Como en *los Rápidos*, se combina la Mecánica con la Hidrostática y la Hidrodinámica. Vale pues lo dicho para aquella atracción que, salvo las características típicas de la atracción, puede aplicarse perfectamente.



Además en esta atracción aparecen otros fenómenos muy interesantes; por un lado, la ascensión de la barcaza hasta su punto de caída, y por otro, los fenómenos derivados de la formación de ondas en el estanque.

## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

De los tres aspectos físicos fundamentales que se pueden observar, los relacionados con el ascenso por la rampa y la caída casi libre desde lo alto de la misma, y las cuestiones de flotabilidad y equilibrio en cuerpos flotantes se han tratado ya en otras atracciones (*Rápidos, Siete Picos, Tornado*). Únicamente puede matizarse el aspecto del rozamiento, minimizado por la presencia del agua, y que no puede tratarse propiamente como un rozamiento seco, es decir, entre dos superficies sólidas sin lubricante.

Un aspecto nuevo es la entrada del barco en el agua con la formación de la onda de choque. Un tratamiento riguroso del fenómeno sale de los límites de este trabajo, pero sí debe resaltarse que la altura de la onda es mayor con la barcaza llena que vacía, es decir, depende de la masa de la barcaza.

La onda de choque se transmite a lo largo de la superficie y se refleja en los bordes, lo que produce curiosas figuras de interferencia.

Como es sabido, una onda es una perturbación periódica en el espacio y en el tiempo. Entre las ondas, las más conocidas son las armónicas. Consisten en la propagación en el espacio de un movimiento armónico.

Los parámetros que caracterizan estas ondas son: amplitud, que es la distancia entre el punto de equilibrio y la máxima separación de este; longitud de onda,  $\lambda$ , que es la distancia entre dos puntos inmediatos que en el mismo tiempo se encuentran en el mismo estado de vibración, y reflejan la periodicidad en el espacio. Su inversa es el número de ondas; periodo, tiempo invertido por cada partícula vibrante en dar una oscilación completa. Su inversa,  $f$ , es la frecuencia.

Velocidad de propagación,  $c = \lambda / T = \lambda f$ .

Un análisis de los fenómenos de las ondas puede hacerse a partir de una fotografía, que permite medir la longitud de onda,  $\lambda$ , mientras que observando el movimiento de algún pequeño objeto flotante, un corcho, por ejemplo, puede medirse el periodo contando el tiempo invertido en un número de oscilaciones. Esto es más seguro que medir una única oscilación.

Conocidos estos datos, es posible medir la velocidad de propagación de las ondas. Habrá que distinguir entre la velocidad con que se propaga la perturbación y la velocidad con que oscilan las partículas, resaltando que, en general, estas se limitan a un movimiento de vaivén en torno a una posición de equilibrio.

La velocidad de propagación no depende de la energía con que se propaga, sino del medio y del tipo de onda, en tanto que la de oscilación, que depende de la amplitud, es un reflejo de la energía cinética a su vez proporcional al cuadrado de la amplitud de las ondas. Cuando una onda se amortigua, disminuyen su amplitud y velocidad de vibración, pero se mantienen las restantes magnitudes: longitud de onda, periodo y velocidad de propagación.

Cuando la onda tropieza con un obstáculo, "lo bordea". Es el fenómeno de la difracción, que se hará notar a los estudiantes si este se produce en el estanque.

Cuando la onda cambia de medio, se produce el fenómeno de la refracción, cambio de dirección de la dirección de propagación. En este caso, se sigue conservando la amplitud pero, puesto que la velocidad de propagación es  $c = \lambda / T = \lambda f$ , si la onda vuelve al medio de partida, se dice que se refleja.

La reflexión y la refracción cumplen las leyes de Snell.

La interferencia de la onda y la formación de las figuras es la habitual. Es decir, supuestos dos focos emisores  $A, B$  y un punto cualquiera distante  $x_a$  y  $x_b$  de los respectivos focos, y aceptando que la amplitud de ambas ondas es la misma, lo cual es bastante plausible, y que ambas tienen el mismo periodo, el desplazamiento vertical será la suma de ambos desplazamientos de modo que si cada onda está descrita por la expresión (por sencillez se prescinde del ángulo de fase inicial)

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_i}{\lambda} \right)$$

cuando se produce la interferencia

$$\begin{aligned} y(x, t) = y_a + y_b &= A \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_a}{\lambda} \right) + A \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_b}{\lambda} \right) = \\ &= 2A \cos 2\pi \left( \frac{x_b - x_a}{2\lambda} \right) \operatorname{sen} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_a + x_b}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Obsérvese que la expresión presenta la misma forma que cualquiera de las ondas incidentes, con la amplitud modulada por un factor coseno que depende de la diferencia de caminos entre ambas ondas. El valor máximo de la amplitud resultante,  $2A$ , se producirá cuando el coseno en valor absoluto valga la unidad, es decir,

$$2\pi\left(\frac{x_b - x_a}{2\lambda}\right) = n\pi \Rightarrow (x_b - x_a) = 2n\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

y la interferencia es constructiva; mientras que si este término es nulo,

$$2\pi\left(\frac{x_b - x_a}{2\lambda}\right) = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow (x_b - x_a) = (2n + 1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

también lo será la amplitud, la onda desaparece, es la interferencia destructiva.

Los resultados de las interferencias son las llamadas figuras de interferencia que se observan muy bien en el estanque.

### 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

#### Verificación de los datos

Según los datos oficiales, la rampa de entrada tiene una longitud de 50 m y asciende hasta una altura de 20 m con un ángulo de 30°. Evidentemente el dato es erróneo ya que  $\sin 30 = 0,5 \neq 20/50 = 0,4$  y si el dato se refiere a la rampa de caída  $\sin 30 = 0,5 \neq 20/30 = 0,7$ . Puesto que las magnitudes más fácilmente medibles y, por tanto, menos sujetas a error son las longitudes, se aceptarán como válidas las medidas de longitud en detrimento de la angular.

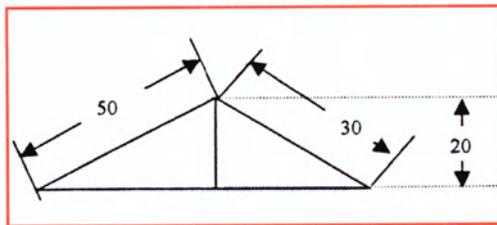


Figura 1. Rampas de subida y bajada

Otro dato oficial es que la velocidad máxima alcanzada por la barca es de 20 km/h = 5,56 m/s.

Dado que si la barca cayera sin rozamientos la velocidad en su base debería ser

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 20} = 19,80 \text{ m/s}$$

puede determinarse el valor de la fuerza de rozamiento por un balance energético.

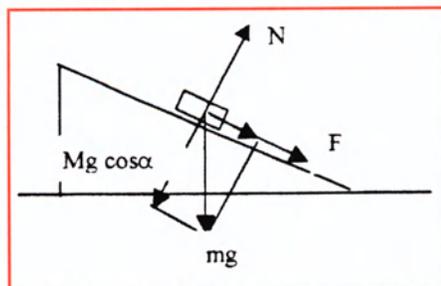


Figura 2. Diagrama de fuerzas

$$E_c = E_p - W_r = mgh - F_r \times l \Rightarrow v = \sqrt{2\left(gh - \frac{F_r \times l}{m}\right)}$$

Puesto que la masa del barco no es conocida, o bien se estima el dato o simplemente se calcula la aceleración de rozamiento como

$$a = \frac{gh - \frac{v^2}{2}}{l} = 5,504 \text{ ms}^{-2}$$

y de ahí puede deducirse el coeficiente aparente de rozamiento.

$$\mu \frac{N}{m} = \mu \frac{mg \cos \alpha}{m} = \mu g \cos \alpha \Rightarrow \mu = \frac{F_r}{mg \cos \alpha} = \frac{5,504}{9,8 \times 0,745} = 0,75$$

## 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

La simulación pretende reconstruir una interferencia, que debe ser lo más dinámica posible, como corresponde al fenómeno real. Por eso se insiste en dejar fuera de las fórmulas los parámetros, para poder manipular con facilidad y observar los resultados.

En la medida de lo posible es conveniente utilizar datos reales, estimados por los propios estudiantes sobre el caso real.

A fin de poder visualizar los resultados, se ha modificado ligeramente la amplitud de una de las ondas. Tal vez lo mejor sea proceder con la misma amplitud, aunque en la práctica el caso ideal no se produce y la simulación, tal como la presentamos, es más realista.

Obsérvese que en la línea de datos se calcula de modo automático la frecuencia y la pulsación, al introducir los datos de periodo y longitud de onda, que habrán sido estimados por los estudiantes en su visita al parque, como ya se dijo.

|    | A           | B          | C           | D           | E     | F      | G           | H     | I |
|----|-------------|------------|-------------|-------------|-------|--------|-------------|-------|---|
| 1  | Longitud(m) | Period(s)  | xa          | xb          | xa-xb | f(s-1) | W           | dt    |   |
| 2  | 0,3         | 0,25       | 0           | 0,3         | 0,3   | 4      | 25,13274123 | 0,001 |   |
| 3  | A(m)        | A'         |             |             |       |        |             |       |   |
| 4  | 0,25        | 0,255      |             |             |       |        |             |       |   |
| 5  | t           | y1         | y2          | y1+y2       |       |        |             |       |   |
| 6  | 0           | 0          | 6,24826E-17 | 6,24826E-17 |       |        |             |       |   |
| 7  | 0,001       | 0,00628252 | 0,006408174 | 0,012690698 |       |        |             |       |   |
| 8  | 0,002       | 0,01256108 | 0,012812301 | 0,025373381 |       |        |             |       |   |
| 9  | 0,003       | 0,0188317  | 0,019208335 | 0,038040037 |       |        |             |       |   |
| 10 | 0,004       | 0,02509043 | 0,025592237 | 0,050682666 |       |        |             |       |   |
| 11 | 0,005       | 0,03133331 | 0,031959975 | 0,063293283 |       |        |             |       |   |
| 12 | 0,006       | 0,0375564  | 0,038307525 | 0,075863923 |       |        |             |       |   |
| 13 | 0,007       | 0,04375576 | 0,04463088  | 0,088386645 |       |        |             |       |   |
| 14 | 0,008       | 0,0499275  | 0,050926045 | 0,10085354  |       |        |             |       |   |
| 15 | 0,009       | 0,05606769 | 0,057189044 | 0,113256734 |       |        |             |       |   |
| 16 | 0,01        | 0,06217247 | 0,063415921 | 0,125588393 |       |        |             |       |   |
| 17 | 0,011       | 0,06823798 | 0,069602744 | 0,137840727 |       |        |             |       |   |
| 18 | 0,012       | 0,0742604  | 0,075745603 | 0,150005999 |       |        |             |       |   |
| 19 | 0,013       | 0,0802359  | 0,081840621 | 0,162076523 |       |        |             |       |   |
| 20 | 0,014       | 0,08616073 | 0,087883945 | 0,174044676 |       |        |             |       |   |
| 21 | 0,015       | 0,09203114 | 0,093871761 | 0,185902899 |       |        |             |       |   |
| 22 | 0,016       | 0,09784342 | 0,099800285 | 0,197643702 |       |        |             |       |   |
| 23 | 0,017       | 0,1035939  | 0,105665773 | 0,209259668 |       |        |             |       |   |
| 24 | 0,018       | 0,10927894 | 0,11146452  | 0,220743462 |       |        |             |       |   |

Las fórmulas informáticas han sido

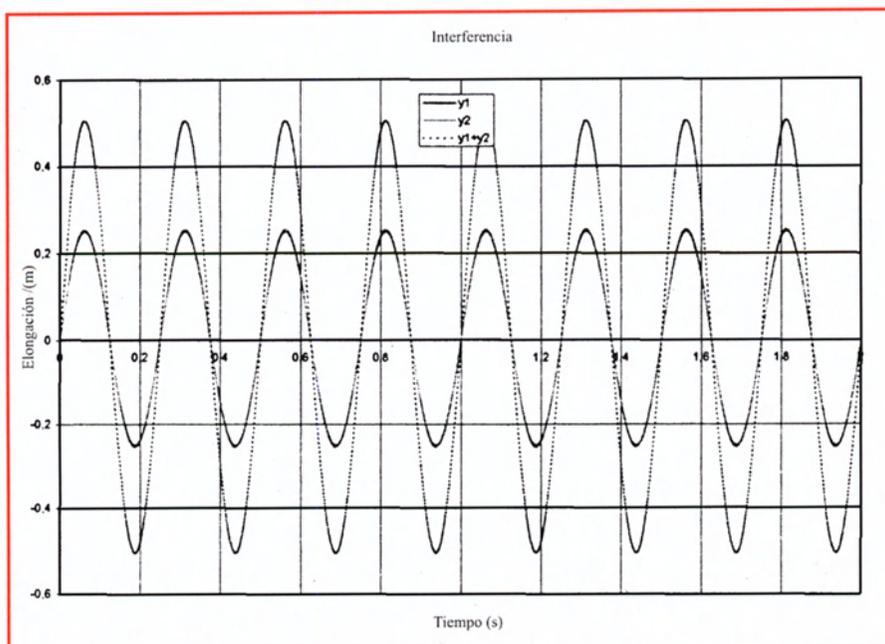
$$Y1=\$A\$4*\text{SENO}(2*PI()*(\$A6/\$B\$2- C\$2/\$A\$2))$$

$$Y2=\$B\$4*\text{SENO}(2*PI()*(\$A6/\$B\$2- D\$2/\$A\$2))$$

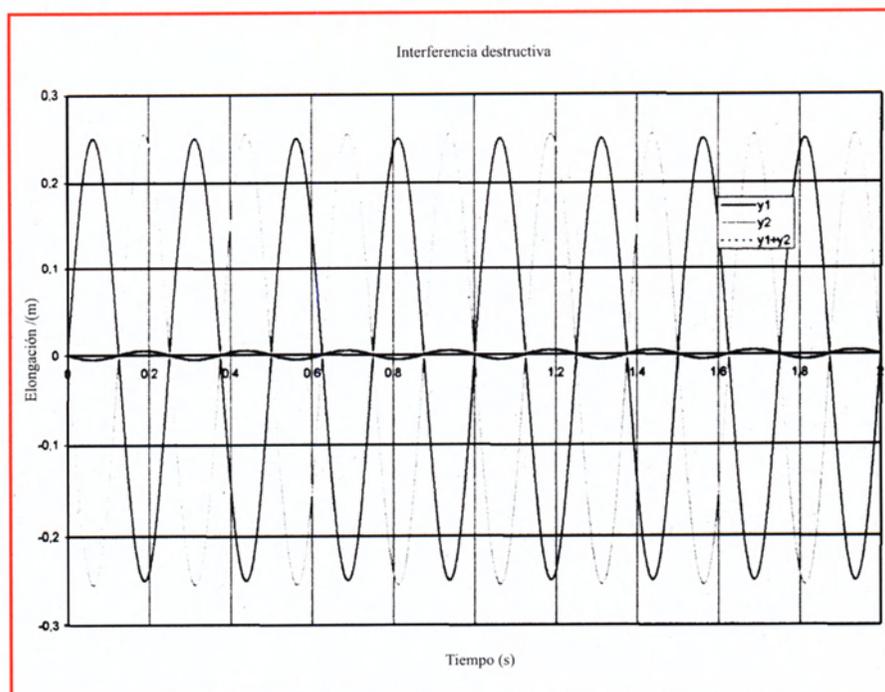
$$Y1+Y2=B6+C6$$

La hoja principal se ha copiado en otras hojas en las que se ha modificado el valor de  $xa$  y  $xb$ , para conseguir interferencia destructiva y sin particularidades.

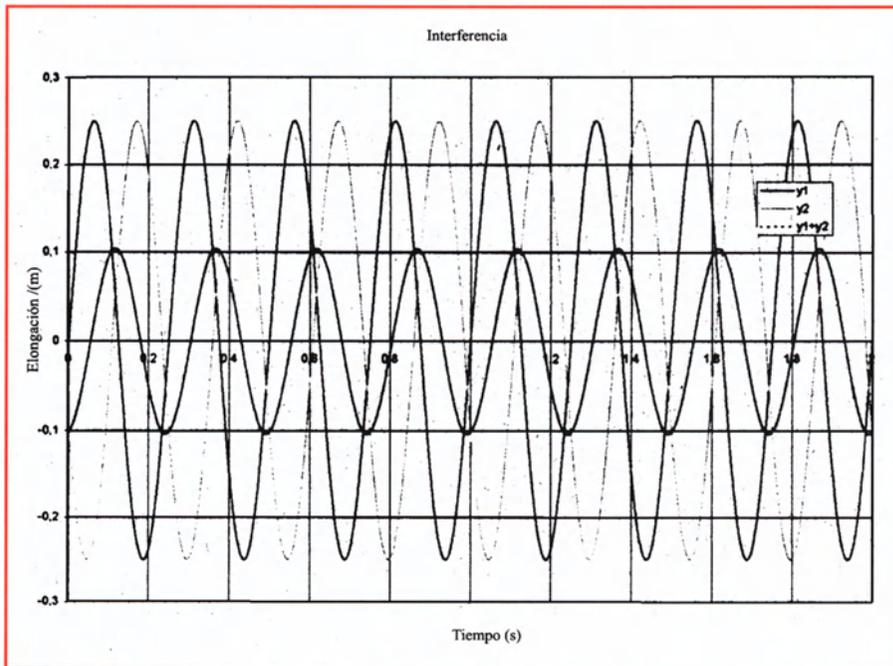
Los resultados gráficos han sido:



**Figura 3.** Interferencia absolutamente constructiva



**Figura 4.** Interferencia casi totalmente destructiva



**Figura 5. Interferencia general**

Con esta metodología pueden analizarse, de modo muy efectivo, todo tipo de interferencias, incluso pulsaciones y batidos.

# El Tornado

## 1. IDEAS BÁSICAS

Esta atracción presenta como principal diversión el rizo, “*looping*”. Los viajeros en el carrito llegan a ponerse boca abajo sin caerse y sin que se les caiga ningún objeto del bolsillo. Es una consecuencia de la rotación<sup>14</sup>.



## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

El fundamento físico de esta atracción es muy semejante al de *los Siete Picos*, pero en este caso las aceleraciones son más violentas y se requieren velocidades mayores.

En general la relación entre las fuerzas que actúan puede observarse en la gráfica, debiendo verificarse, si se desprecian rozamientos que

<sup>14</sup> El desarrollo que sigue es semejante al de *la Montaña Rusa*.

$$m\omega^2 r = R - mg \cos\theta = R - mg \cos\omega t$$

siendo  $R$  la reacción del carril y  $\omega$  la velocidad angular.

El punto crítico es el más alto de la trayectoria. Pasará el carril siempre que

$$\frac{v^2}{r} \geq g$$

en el límite, es decir, si en este punto  $R = 0$ , entonces se cumple la igualdad. En general, para que el carrito pase sin caerse, no es preciso suministrar energía al vehículo, basta con que caiga desde una altura suficiente. Es el caso mínimo, si se desprecian rozamientos se conservará la energía del sistema, es decir,

$$gh = 2gr + \frac{v^2}{2} = 2gr + \frac{gr}{2} \Rightarrow h = \frac{5r}{2}$$

En realidad habría que considerar los rozamientos y hacer algunas correcciones relacionadas con la posición del centro de masa del carrito. En cualquier caso, este es el valor mínimo de la altura de caída libre para que el carrito pase sin problemas por el punto más alto. En la práctica deberá darse un margen de seguridad que significa una velocidad mayor.

Obsérvese que la componente tangencial de la aceleración no es nula y que en consecuencia la velocidad angular variará.

En la atracción real, en algunos puntos de la trayectoria aparecen rizos en plano inclinado. En este caso la distribución de fuerzas se hace más compleja, puesto que requiere un análisis tridimensional del problema. Puede ser interesante construir un modelo vectorial. De todos modos un análisis cuantitativo escapa de lo deseable en el nivel propuesto.

Por semejanza, puede tratarse el peralte de las curvas de las carreteras, así como de la inclinación de los motoristas al tomar curvas o de los aviones al realizar virajes, incluso hablar de la compleja mecánica del tirabuzón ascendente o descendente.

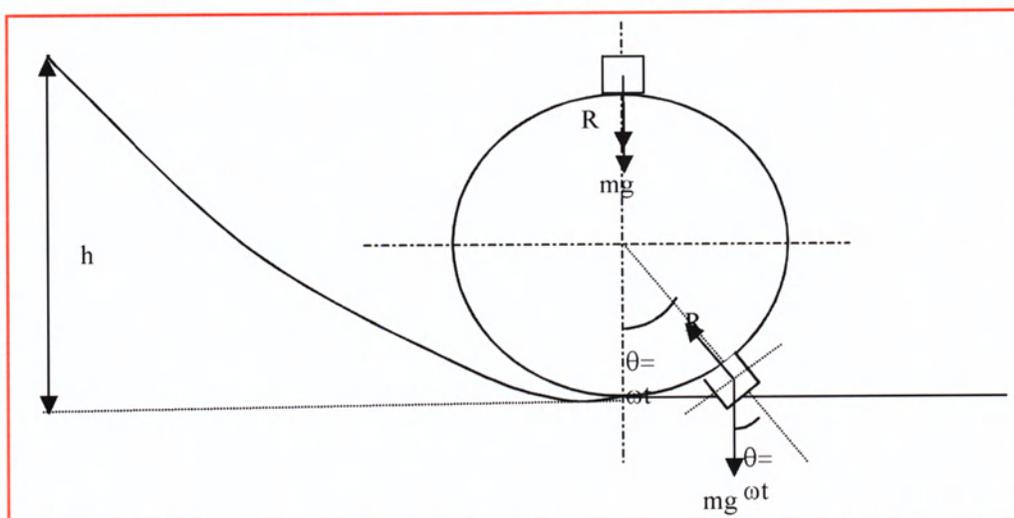


Figura 1. Diagrama del rizo completo

Otro aspecto interesante es que, mientras que en su recorrido el coche prácticamente no consume energía, ésta debe suministrársele al principio, subiendo el carrito con sus ocupantes hasta la altura máxima de lanzamiento. Se trata, una vez más, de un plano inclinado. Esta es una de las tradicionales "máquinas simples" que se explicaban en los viejos manuales de Física.

Toda máquina tiene por objeto aplicar "ventajosamente" una fuerza. En teoría el fundamento de toda máquina simple es la conservación del trabajo. En resumen, en una máquina simple se consigue un determinado trabajo por aplicación de una fuerza relativamente pequeña a lo largo de un recorrido mayor que el más corto. En la práctica no se cumple en rigor la conservación del trabajo, sino que en el sistema aparecen fuerzas de fricción, no

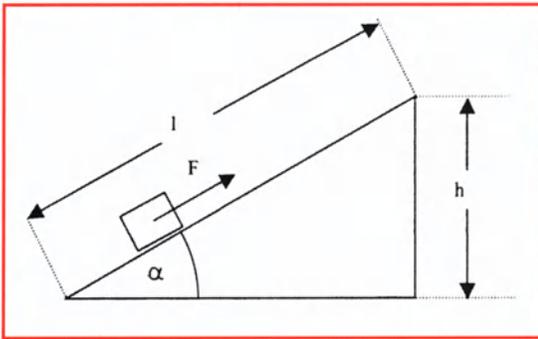


Figura 2. Esquema de la rampa de ascenso

conservativas, que hacen que el trabajo ejercido sea mayor que el trabajo aplicado. Aún así se sigue exigiendo una fuerza menor por lo que desde este punto de vista la máquina puede ser ventajosa.

Así, si  $F$  es la fuerza que se aplica sobre el objeto, se cumplirá que

$Fl = Wh$ , donde  $l$  es la longitud de plano,  $h$  su altura y  $W$  el peso del objeto, dado que  $h = l \sin \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo del plano se tiene  $F = W \sin \alpha$  es decir,  $F \leq W$

### 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

Según los datos oficiales, la rampa de ascenso tiene una longitud de 60 m para elevar el coche con los viajeros hasta una altura de 30 y con un ángulo de  $30^\circ$ .

Estos datos son coherentes ya que  $\sin 30 = 0,5$  y la relación  $l/h = 30/60 = 0,5$ ;

La coherencia de otros datos que da la empresa deben verificarse, así, según la información oficial el coche tiene una masa de 30 Tm y es traccionado por un motor de 170 kW. Un balance energético y la definición de potencia media

$$P = T/t; \Rightarrow P \cdot t = T = mgh$$

significa que en el mejor de los casos, con el motor trabajando a toda potencia y despreciando cualquier tipo de pérdida, lo que es imposible, será preciso un tiempo  $t = 3 \cdot 10^5 \cdot 9,8 \cdot 30 / 170 \cdot 10^3 = 518,82 \text{ s} = 8,65 \text{ s}$  para el ascenso del vehículo hasta la parte más alta de la rampa. Este particular puede ser verificado por los estudiantes.

Otro dato que puede comprobarse es la velocidad máxima del coche, oficialmente  $80 \text{ km h}^{-1}$ .

Una vez más, y teniendo en cuenta el carácter conservativo del campo gravitatorio, la máxima velocidad que puede alcanzarse, a partir de un desnivel de 30 m, es:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot 9,8} = 24,25 \text{ms}^{-1} = 87,30 \text{km h}^{-1} > 80 \text{km h}^{-1}$$

lo cual es coherente. Esta velocidad, como es obvio, se llevará en el punto más bajo de la trayectoria.

Como se ha dicho antes, para pasar el rizo con seguridad el carro debe caer por lo menos desde una altura  $h = 5/2 R$  es decir,  $R \leq 2h / 5 = 12 \text{ m}$ .

En la simulación se analizan las variaciones de las velocidades tangencial y angular, y las de las aceleraciones correspondientes.

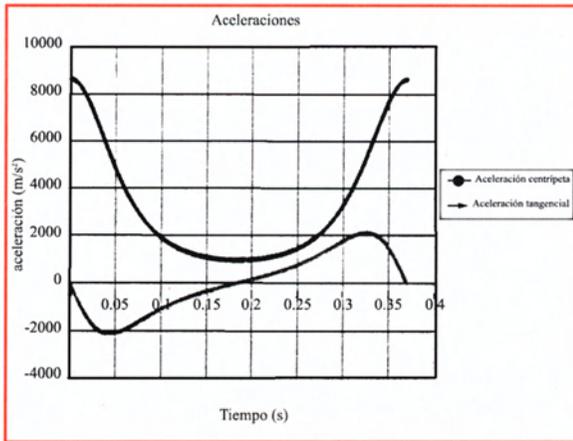
La velocidad en cada instante se calcula mediante un balance energético y de ella se deducen las restantes magnitudes:

$$v^2 = 2g(h_0 - h); \quad \omega = \frac{v}{r}, \quad a_t \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad a_c = \omega^2 r$$

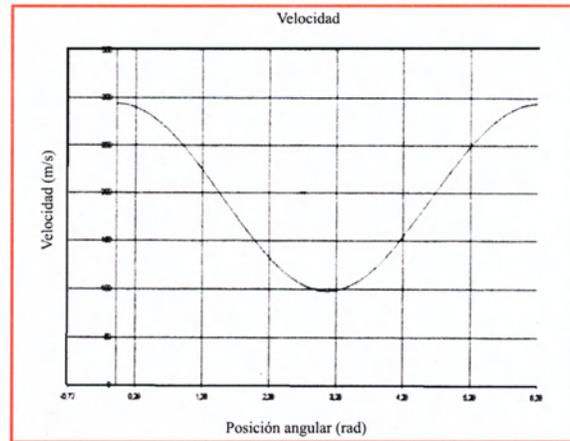
|    | A          | B           | C           | D                      | E                      | F          | G          | H          | I                          |
|----|------------|-------------|-------------|------------------------|------------------------|------------|------------|------------|----------------------------|
| 1  | r0         | h0          | dt          | m                      | h0                     |            |            |            |                            |
| 2  | 10         | 1           | 0,00018493  | 0,5                    | 30                     |            |            |            |                            |
| 3  | t/(s)      | theta/(rad) | R/(N)       | ac/(m/s <sup>2</sup> ) | at/(m/s <sup>2</sup> ) | h/(m)      | w/(rad/s)  | v/(m/s)    | alfa/(rad/s <sup>2</sup> ) |
| 4  | 0          | 0           | -4316,9     | 8643,6                 |                        | 0          | 29,4       | 294        |                            |
| 5  | 0,00018493 | 0,00543709  | -4316,85749 | 8643,51483             | -7,83264691            | 0,00014781 | 29,3998551 | 293,998551 | -0,78326469                |
| 6  | 0,00036987 | 0,01087415  | -4316,72995 | 8643,25931             | -23,4975548            | 0,00059123 | 29,3994206 | 293,994206 | -2,34975548                |
| 7  | 0,0005548  | 0,01631112  | -4316,51739 | 8642,83348             | -39,1610735            | 0,00133023 | 29,3986964 | 293,986964 | -3,91610735                |
| 8  | 0,00073974 | 0,02174797  | -4316,21985 | 8642,23737             | -54,8221227            | 0,00236478 | 29,3976825 | 293,976825 | -5,48221227                |
| 9  | 0,00092467 | 0,02718463  | -4315,83733 | 8641,47104             | -70,4796225            | 0,00369479 | 29,3963791 | 293,963791 | -7,04796225                |
| 10 | 0,00110961 | 0,03262104  | -4315,36989 | 8640,53457             | -86,1324936            | 0,00532019 | 29,3947862 | 293,947862 | -8,61324936                |
| 11 | 0,00129454 | 0,03805717  | -4314,81756 | 8639,42803             | -101,779657            | 0,00724087 | 29,392904  | 293,92904  | -10,1779657                |
| 12 | 0,00147948 | 0,04349294  | -4314,1804  | 8638,15154             | -117,420036            | 0,00945669 | 29,3907324 | 293,907324 | -11,7420036                |
| 13 | 0,00166441 | 0,04892831  | -4313,45847 | 8636,70522             | -133,052554            | 0,01196751 | 29,3882718 | 293,882718 | -13,3052554                |
| 14 | 0,00184935 | 0,05436323  | -4312,65184 | 8635,08921             | -148,676135            | 0,01477316 | 29,3855223 | 293,855223 | -14,8676135                |
| 15 | 0,00203428 | 0,05979764  | -4311,76059 | 8633,30367             | -164,289705            | 0,01787346 | 29,382484  | 293,82484  | -16,4289705                |
| 16 | 0,00221922 | 0,06523148  | -4310,7848  | 8631,34876             | -179,892194            | 0,02126819 | 29,3791572 | 293,791572 | -17,9892194                |
| 17 | 0,00240415 | 0,07066472  | -4309,72457 | 8629,22469             | -195,48253             | 0,02495712 | 29,375542  | 293,75542  | -19,548253                 |
| 18 | 0,00258909 | 0,07609728  | -4308,58001 | 8626,93165             | -211,059645            | 0,02894001 | 29,3716388 | 293,716388 | -21,1059645                |
| 19 | 0,00277402 | 0,08152912  | -4307,35121 | 8624,46987             | -226,622474            | 0,03321658 | 29,3674478 | 293,674478 | -22,6622474                |
| 20 | 0,00295896 | 0,08696019  | -4306,03831 | 8621,83959             | -242,169953            | 0,03778655 | 29,3629692 | 293,629692 | -24,2169953                |
| 21 | 0,00314389 | 0,09239042  | -4304,64143 | 8619,04106             | -257,701021            | 0,0426496  | 29,3582034 | 293,582034 | -25,7701021                |
| 22 | 0,00332883 | 0,09781978  | -4303,1607  | 8616,07456             | -273,21462             | 0,04780541 | 29,3531507 | 293,531507 | -27,321462                 |
| 23 | 0,00351376 | 0,1032482   | -4301,59628 | 8612,94037             | -288,709694            | 0,05325362 | 29,3478114 | 293,478114 | -28,8709694                |
| 24 | 0,0036987  | 0,10867564  | -4299,9483  | 8609,6388              | -304,185192            | 0,05899387 | 29,342186  | 293,42186  | -30,4185192                |

Las fórmulas informáticas principales han sido.

- H=\$A\$2\*(1 - COS(B4))
- w=9,8\*(\$E\$2 - \$A\$2\*(1 - COS(B4)))/\$A\$2
- v=G4\*\$A\$2
- at=(H5 - H4)/\$C\$2
- ac=G4^2\*\$A\$2

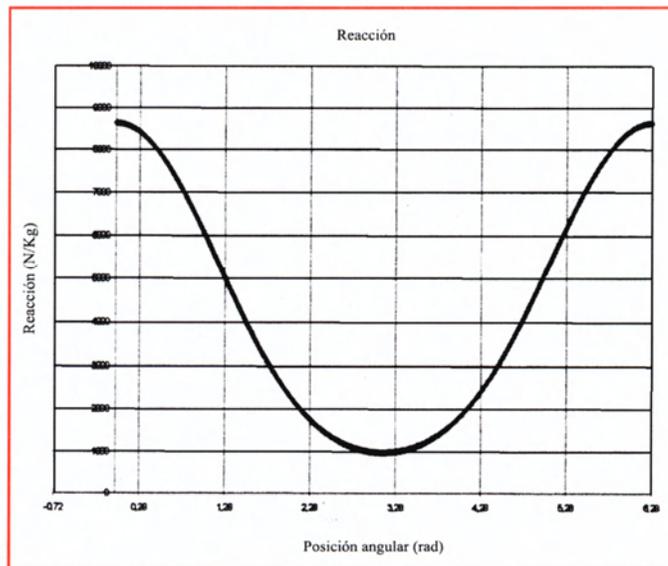


**Figura 3.** Aceleraciones tangencial y centrípeta frente a posición radial



**Figura 4.** Velocidad frente a posición radial

También se ha calculado la reacción del carril por unidad de masa. La figura representa cómo evoluciona su módulo con el ángulo recorrido.



**Figura 5.** Reacción del carril frente posición

En todos los análisis se ha tomado como origen de ángulos el punto inferior de la trayectoria. Obsérvese, como se hace patente, que tanto la velocidad del móvil como la reacción del carrito son mínimas en el punto más alto del recorrido (Figuras 4 y 5).

# El Barco Pirata

## 1. IDEAS BÁSICAS

Se trata de una aproximación del péndulo físico. Obsérvese que el motor sólo impulsa, a través de una rueda de fricción, al barco en el instante en que éste se encuentra al principio o al final de la trayectoria, compensando pues las pérdidas por amortiguamiento del movimiento. En caso de un contacto continuo, aunque se trata de un movimiento de vaivén, no sería un movimiento armónico propiamente dicho que se caracteriza porque la aceleración es proporcional a la distancia al punto de equilibrio. Obsérvese también que no es un péndulo simple, sino, en todo caso, un péndulo compuesto.



En una primera aproximación se podría asimilar la barca a un arco de corona circular e intentar calcular su momento de inercia y su centro de masas.

Es de gran interés, precisamente por esto, que el pasaje del barco esté adecuadamente distribuido, pues una distribución inadecuada provocará un desplazamiento del centro de masas del sistema que puede tener como consecuencia que el movimiento acabe haciéndose caótico, aunque dadas las velocidades y los tiempos en que nos movemos los resultados no serán excesivamente aparatosos.

En cualquier caso, dada la complejidad del sistema, nunca se puede descartar la aparición de caos y su estudio puede ser objeto de una investigación por alumnos avanzados.

## 2. TRATAMIENTO FÍSICO MATEMÁTICO

El péndulo compuesto o físico se diferencia del simple o matemático en que la masa del péndulo no puede considerarse como concentrada en un punto. Para pequeñas oscilaciones puede demostrarse que el periodo del péndulo es,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

donde  $I$  es el momento de inercia del péndulo respecto al centro de suspensión,  $m$  su masa,  $g$  la aceleración de gravedad y  $l$  la distancia entre el punto de suspensión y el centro de gravedad.

Un cálculo del periodo del péndulo permite una estimación de su momento de inercia respecto al eje del que está suspendido o, por lo menos, la relación  $I/m$ , es decir, el radio de giro del barquito.

## 2.1. Rozamiento

Debe considerarse que el impulsor actúa sobre el barquito por rozamiento. En este sentido debe tenerse en cuenta que en el rozamiento hay un aplastamiento del disco de goma, generalmente el neumático de un camión contra el barquito, por lo que en rigor debe hablarse de un rozamiento seco. Obsérvese además que en algunos momentos del contacto hay deslizamiento entre el neumático y el barquito. También puede comprobarse que cuando ambos se separan el neumático sigue rodando.

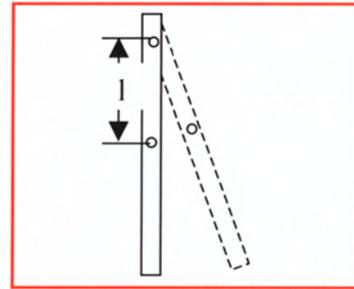


Figura 1. Péndulo compuesto

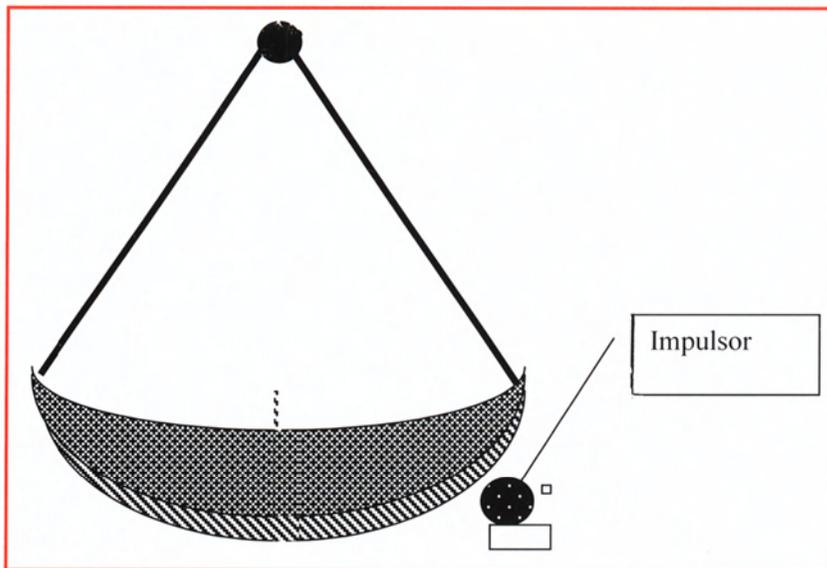


Figura 2. Esquema de la atracción

## 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES

Los datos oficiales de la atracción son:

- Longitud 18 m.
- Ancho 8 m.
- Radio de balanceo 8 m.
- Ángulo de inclinación  $\pm 75^\circ$ .
- Masa 40 Tm.

Para estimar su momento de inercia puede aplicarse la ecuación

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \Rightarrow I = \frac{T^2 ml}{4\pi^2},$$

sin embargo, la posición del centro de masas del sistema no es conocida. Por tanto, con exactitud sólo puede estimarse la relación

$$\frac{I}{l} = \frac{T^2 m}{4\pi^2}$$

para lo cual deberá medirse el periodo, que es el tiempo que se invierte en una oscilación completa y aceptar como correcta la masa facilitada por la empresa. A esta masa se deberá añadir la de los viajeros, que como siempre se estimará 70 kg por adulto y 30 por niño. En cualquier caso, debe notarse que la amplitud de la oscilación en modo alguno puede considerarse pequeña, por lo que la fórmula utilizada no es rigurosamente correcta.

Si se aproxima el barco a una especie de sector de corona cilíndrica, y recordando que el centro de masas de un sector circular de amplitud  $\alpha$  tiene como coordenada radial  $r=2R \text{ sen } \alpha/(3a)$ , puede hallarse la coordenada radial de la corona como

$$\bar{r} = \frac{\frac{2\text{sen}\alpha}{6\alpha} (r_1^3 - r_2^3)}{\frac{1}{2} (r_1^2 - r_2^2)} = \frac{2\text{sen}\alpha (r_1^3 - r_2^3)}{3\alpha (r_1^2 - r_2^2)}$$

Las restantes coordenadas se determinan por simetría, el ángulo  $\alpha$  puede determinarse como  $\alpha = a \text{ sen } (9/11) = 0,958 \text{ rad}$ , siempre a partir de los datos de la empresa, que deben, en la medida de lo posible, verificarse por los estudiantes.

Como consecuencia el centro de masas se encuentra a un  $r \cong 8,57 \text{ m}$ , respecto al vértice del sector que es el punto de suspensión.

#### 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

Pretende poner de manifiesto la importancia de la aproximación a las pequeñas oscilaciones.

Calcula en cada instante la velocidad del centro de masas del péndulo por un balance de energías (Figura 3).

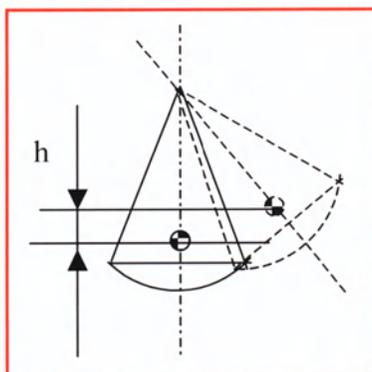


Figura 3. Esquema de energías

La posición del centro de masas del sistema inicialmente se encuentra en una altura

$$h_0 = d(1 - \cos \alpha_0),$$

siendo  $d$  la distancia del punto de suspensión al centro de gravedad, estimada en el apartado anterior. Entonces la energía potencial inicial tiene el valor:  $E_0 = mgh_0$ .

En cualquier instante la energía potencial del péndulo será  $E = mgh$ , siendo ahora  $h = d(1 - \cos \alpha)$ , donde  $\alpha$  es el ángulo formado por el eje de simetría del columpio y la vertical

y, en consecuencia, al ser un sistema conservativo  $E_c = E_0 - E$ . El cálculo de la velocidad tangencial instantánea del balancín es inmediato.

La velocidad angular se obtendrá dividiendo la transversal por el radio de giro. El tiempo se aproximará como un cociente incremental  $t = v / \Delta\theta$  y las aceleraciones también, aproximando la derivada por el cociente incremental.

Se ha tomado como referencia medio período, es decir, un valor del ángulo entre  $+75^\circ$  y  $-75^\circ$ . El tiempo preciso para el último valor angular equivaldrá a  $T/2$ .

Podría estudiarse un rango más amplio, pero llevaría algunas pequeñas dificultades de programación de la hoja.

| A  | B          | C          | D          | E           | F             | G          | H          | I          |            |       |
|----|------------|------------|------------|-------------|---------------|------------|------------|------------|------------|-------|
| 1  | r/(m)      | M/(kg)     | T(s)       | alfa(0)/(°) | alfa(0)/(rad) | Rt         | dalfa      |            |            |       |
| 2  | 8,35       | 40000      | 6,48970858 | 75          | 1,30899694    |            | 11         | 0,001309   |            |       |
| 3  | alfa(rad)  | hcm (m)    | Ep(J)      | Ec(J)       | v(m/s)        | w(rad/s)   | Vext (m/s) | t          | at         | ac an |
| 4  | 1,30899694 | 6,18886097 | 2426033,5  | 0           | 0             | 0          | 0          | 0          | 12,4680854 | 1,13  |
| 5  | 1,30768794 | 6,17830514 | 2421895,61 | 4137,8873   | 0,45485642    | 0,05447382 | 0,59921205 | 0,04805967 | 12,4636902 | 1,13  |
| 6  | 1,30637895 | 6,16775302 | 2417759,19 | 8274,31591  | 0,64320743    | 0,07703083 | 0,84733913 | 0,06796766 | 12,4592736 | 1,13  |
| 7  | 1,30506995 | 6,15720465 | 2413624,22 | 12409,2787  | 0,78769533    | 0,09433477 | 1,03768247 | 0,08324491 | 12,4548356 | 1,13  |
| 8  | 1,30376095 | 6,14666003 | 2409490,73 | 16542,7687  | 0,90947151    | 0,10891874 | 1,19810619 | 0,09612534 | 12,4503763 | 1,13  |
| 9  | 1,30245195 | 6,13611919 | 2405358,72 | 20674,7788  | 1,01672953    | 0,12176402 | 1,33940417 | 0,10747423 | 12,4458957 | 1,13  |
| 10 | 1,30114296 | 6,12558214 | 2401228,2  | 24805,3018  | 1,11367189    | 0,13337388 | 1,46711268 | 0,11773533 | 12,4413938 | 1,1   |
| 11 | 1,29983396 | 6,11504891 | 2397099,17 | 28934,3307  | 1,2027953     | 0,14404734 | 1,58452075 | 0,12717222 | 12,4368705 | 1,13  |
| 12 | 1,29852496 | 6,1045195  | 2392971,64 | 33061,8584  | 1,28572661    | 0,15397923 | 1,69377158 | 0,13595665 | 12,4323259 | 1,13  |
| 13 | 1,29721597 | 6,09399394 | 2388845,62 | 37187,8779  | 1,36359594    | 0,1633049  | 1,79635394 | 0,14420791 | 12,42776   | 1,12  |
| 14 | 1,29590697 | 6,08347224 | 2384721,12 | 41312,3821  | 1,43722618    | 0,1721229  | 1,89335186 | 0,15201285 | 12,4231729 | 1,12  |
| 15 | 1,29459797 | 6,07295443 | 2380598,14 | 45435,3639  | 1,5072386     | 0,18050762 | 1,98558378 | 0,15943703 | 12,4185644 | 1,1   |
| 16 | 1,29328898 | 6,06244052 | 2376476,69 | 49556,8162  | 1,57411588    | 0,18851687 | 2,07368559 | 0,1665314  | 12,4139347 | 1,12  |
| 17 | 1,29197998 | 6,05193053 | 2372356,77 | 53676,732   | 1,63824192    | 0,19619664 | 2,15816301 | 0,17333645 | 12,4092836 | 1,12  |
| 18 | 1,29067098 | 6,04142448 | 2368238,4  | 57795,1043  | 1,699928      | 0,20358419 | 2,23942611 | 0,17988502 | 12,4046114 | 1,12  |
| 19 | 1,28936198 | 6,03092239 | 2364121,58 | 61911,9259  | 1,75943067    | 0,21071026 | 2,31781286 | 0,18620418 | 12,3999178 | 1,12  |
| 20 | 1,28805299 | 6,02042426 | 2360006,31 | 66027,1899  | 1,81696436    | 0,21760052 | 2,39360575 | 0,19231655 | 12,3952031 | 1,12  |
| 21 | 1,28674399 | 6,00993013 | 2355892,61 | 70140,8891  | 1,87271046    | 0,2242767  | 2,46704372 | 0,19824126 | 12,390467  | 1,12  |
| 22 | 1,28543499 | 5,99944001 | 2351780,49 | 74253,0165  | 1,92682403    | 0,23075737 | 2,53833105 | 0,20399466 | 12,3857098 | 1,12  |
| 23 | 1,284126   | 5,98895392 | 2347669,94 | 78363,5651  | 1,97943887    | 0,23705855 | 2,60764403 | 0,20959087 | 12,3809313 | 1,12  |
| 24 | 1,282817   | 5,97847187 | 2343560,97 | 82472,5279  | 2,03067141    | 0,24319418 | 2,67513599 | 0,21504215 | 12,3761316 | 1,12  |

Las fórmulas informáticas principales han sido:

$$h = \$A\$2*(1 - \text{COS}(A4))$$

$$E_p = \$B\$2*9,8*B4$$

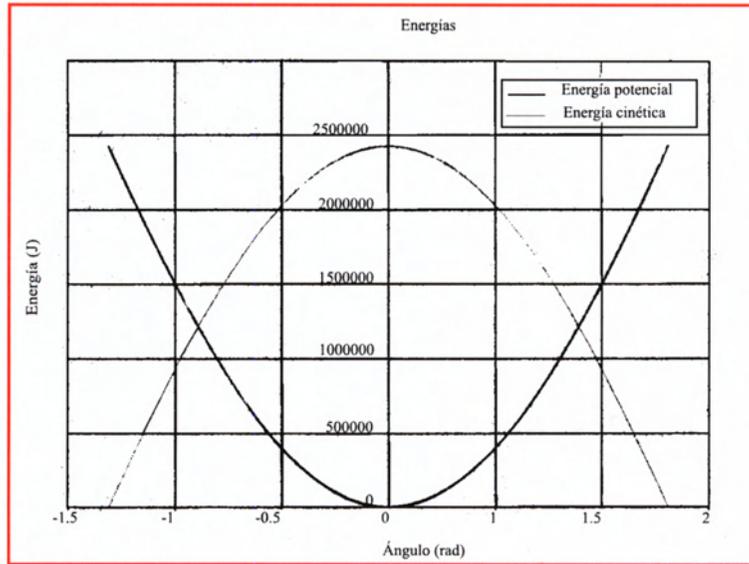
$$E_c = \$C\$4 - C4$$

$$V = \text{RAIZ}(2*D4/\$B\$2)$$

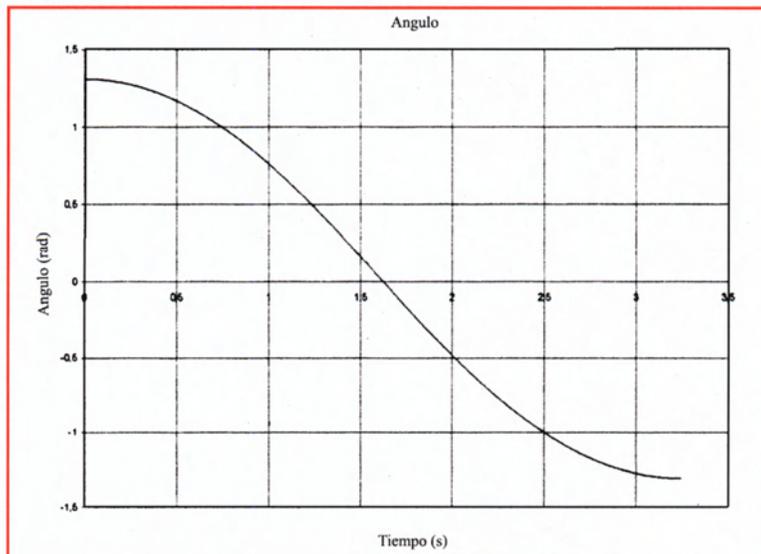
$$t = H4 + \text{ABS}(2*(A4 - A5))/\text{ABS}(F5 + F4)$$

$$at = (G5 - G4)/(H5 - H4)$$

Las representaciones gráficas de las magnitudes más interesantes son:



**Figura 4. Energías**



**Figura 5. Ángulo frente a tiempo**

Especialmente interesante es la Figura 7, en la que se representa la aceleración angular frente al ángulo. En ella se puede observar que para valores pequeños de este ángulo la gráfica es prácticamente una recta, es decir,

$\theta = k\alpha$  que es la ecuación característica del movimiento armónico; cuando la amplitud angular aumenta, la gráfica se curva, es decir, esta relación lineal deja de cumplirse.

Este particular se puede verificar numéricamente dividiendo la aceleración por la coordenada angular y observar que el resultado no es constante.

A partir de los datos estimados se ha encontrado un periodo de unos 6,5 segundos, que debe verificarse con la observación sobre el fenómeno real.

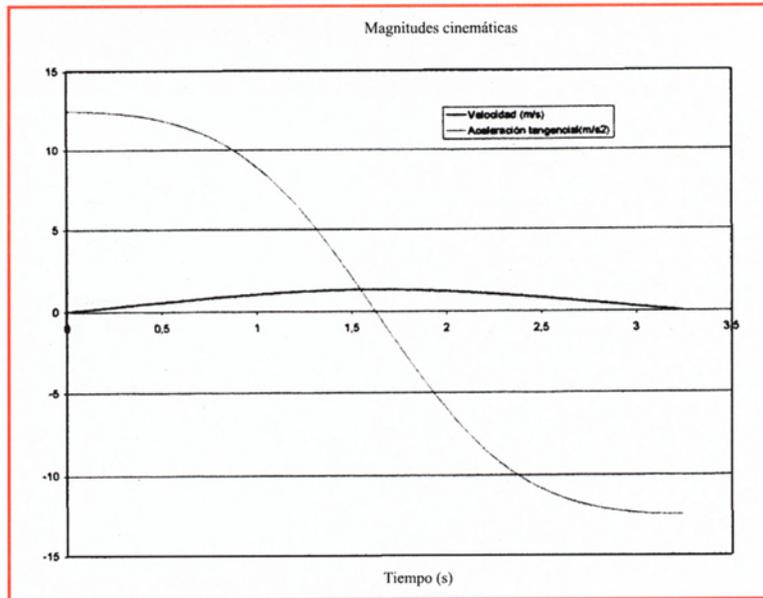


Figura 6. Magnitudes cinemáticas frente al tiempo

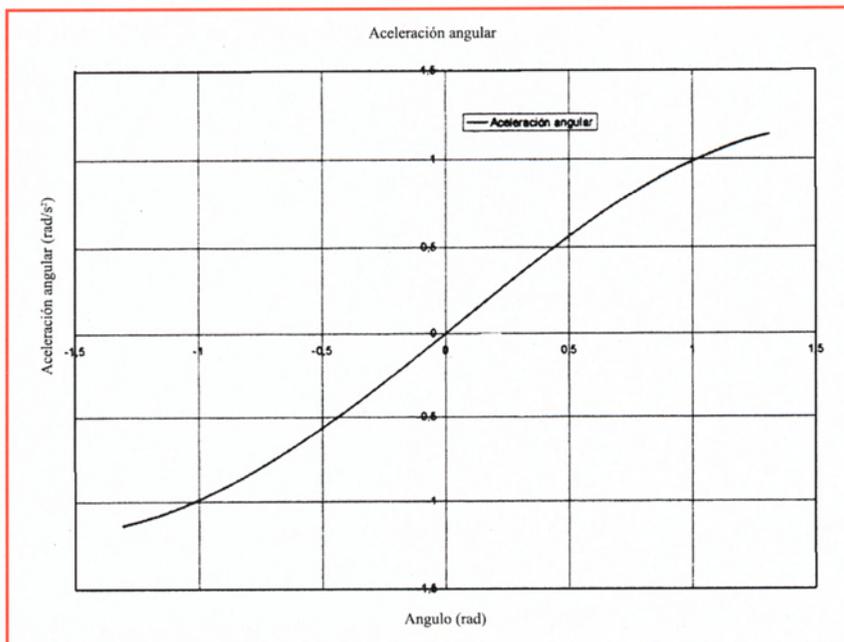


Figura 7. Aceleración angular frente a ángulo

# Las Sillas Voladoras

## 1. IDEAS BÁSICAS

Esta atracción proporciona un excelente estudio de las aceleraciones. Para ello basta con medir la desviación de la silla respecto a la vertical.

Puede hacerse, bien estimando el ángulo “de visu”, bien sobre una fotografía. La plataforma superior, de la que están suspendidas las sillas, además de girar, oscila en torno a un eje horizontal. Sin embargo, este segundo movimiento, en aras de la sencillez, no se tendrá en cuenta.

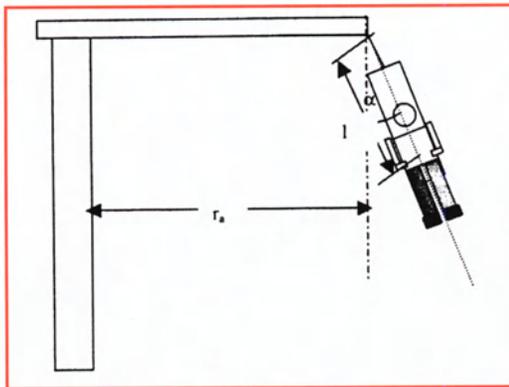


Figura 1. Esquema de las sillas voladoras

## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

Se trata de medir los ángulos formados por la silla y la vertical; esto se puede hacer, por ejemplo, tomando una instantánea.

Un diagrama de cuerpo libre aplicado al columpio (Figura 1) muestra que si  $T$  es la tensión de la sujeción del columpio,

$$T \cos \alpha = mg$$

$$T \sin \alpha = m v^2/R = m\omega^2 R \text{ y operando}$$

$$g \tan \alpha/R = \omega^2$$

y por simples razonamientos geométricos

$$R = r_a + l \sin \alpha$$

siendo  $r_a$  la distancia de la silla al eje del sistema en reposo (Figura 1) y la distancia del punto de suspensión de la silla al centro de masas del viajero.

Existe una proporcionalidad directa entre el ángulo y la velocidad angular al cuadrado, en consecuencia, cuando el ángulo es constante ésta también lo es.

Puede entonces contarse el número de vueltas por segundo y verificar la corrección de la ecuación. Nótese también que, aunque el movimiento tenga velocidad angular constante, hay aceleración ya que hay variación en la dirección de la velocidad.

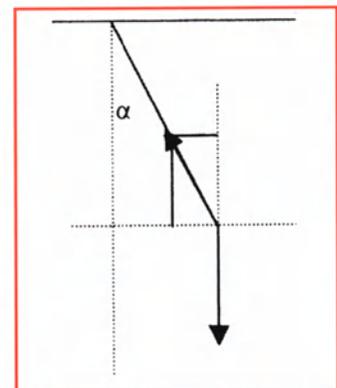


Figura 2. Diagrama de Fuerzas

### 3. APLICACIÓN AL PARQUE DE ATRACCIONES DE MADRID

Según los datos de la empresa, el diámetro de la atracción es de 22 m, la longitud de las cadenas es de 5 m y el dispositivo gira a una velocidad angular de 11 r.p.m., siendo el ángulo máximo de las sillas de  $20^\circ$ .

Una verificación de la coherencia de estos datos utilizando la ecuación,

$\omega^2 = g \tan \alpha / R \Rightarrow \omega = 0,530 \text{ rad s}^{-1}$  lo que equivale a una frecuencia  $f = \omega / 2\pi = 0,084 \text{ s}^{-1} = 5,058 \text{ r.p.m.}$  da un resultado discordante con los datos del parque.

La masa del pasajero no influye en el ángulo lo que se resaltarà a los estudiantes y se les pedirá que lo verifiquen ya sea cualitativamente, ya cuantitativamente sobre una fotografía<sup>15</sup>.

### 4. SIMULACIÓN INFORMÁTICA

Se pretende, aunque de modo aproximado, intentar reflejar el balanceo de la plataforma superior. Para ello se supone una oscilación en torno al plano horizontal, cuya amplitud se deja libre, con un periodo de oscilación de la mitad del de rotación. Esto puede modificarse con un poco más de esfuerzo de programación.

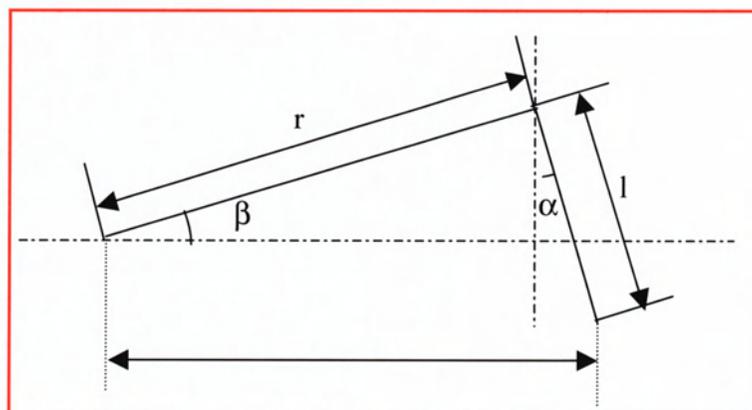


Figura 3. Esquema de posición del columpio con balanceo

En el esquema se ve cómo se calcula el radio de giro instantáneo que valdrá

$$r_g = r \cos b + l \sin \alpha$$

La ecuación precisa para determinar  $\alpha$  sería

$$\tan \alpha = r_g \omega^2 / g = (r \cos b + l \sin \alpha) \omega^2 / g$$

Esta ecuación no se puede resolver de forma analítica. Para resolverla numéricamente, se recurre a una aproximación.

<sup>15</sup> En este ejercicio como en otros muchos, puede ser interesante una cámara tipo instantáneo (Polaroid®)

Se calcula el valor de  $\alpha$  para  $\beta = 0$ . Para ello puede utilizarse el resultado del apartado anterior, es decir, fijar  $\alpha$  y calcular  $\omega^2$  o utilizar la herramienta *solver*.

A partir de este valor calculan los sucesivos  $\alpha$  tomando  $\sin \alpha$  con el valor de  $\alpha$  anterior o posterior, según se proceda hacia arriba o hacia abajo en la tabla de valores.

La aproximación es perfectamente aceptable y permite hallar tanto la desviación de la silla del punto preciso como la aceleración centrípeta en cada instante.

Como puede observarse, tanto una como otra, varían alcanzando su máximo cuando el plano superior está en posición horizontal.

|    | A          | B           | C          | D          | E          | F          | G             | H               | I              |
|----|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|---------------|-----------------|----------------|
| 1  | f          | T           | W          | ra         | l          | dt         | oscilación    | oscilación(rad) |                |
| 2  | 0,0843124  | 11,86065158 | 0,52975043 | 11         | 5          | 0,00593033 | 20            | 0,34906585      |                |
| 3  | t          | beta        | r'         | alfa       | x          | y          | z             | ac              | xx yy          |
| 4  | 0          | 0,174532925 | 10,8328853 | 0,34426137 | 12,5203927 |            | 0 -2,79649504 | 3,51366692      | 12,7101007     |
| 5  | 0,00593033 | 0,174358392 | 10,8332185 | 0,34427097 | 12,5207093 | 0,0393351  | -2,79836957   | 3,51377311      | 12,710038 0,0  |
| 6  | 0,01186065 | 0,174183859 | 10,8335514 | 0,34428056 | 12,5209019 | 0,07867218 | -2,80024416   | 3,5138792       | 12,7098498 0,0 |
| 7  | 0,01779098 | 0,174009326 | 10,8338839 | 0,34429014 | 12,5209706 | 0,11801086 | -2,80211883   | 3,51398518      | 12,7095362 0,  |
| 8  | 0,0237213  | 0,173834793 | 10,8342162 | 0,34429971 | 12,5209153 | 0,15735075 | -2,80399358   | 3,51409106      | 12,7090972 0,1 |
| 9  | 0,02965163 | 0,173660261 | 10,8345481 | 0,34430927 | 12,5207361 | 0,19669144 | -2,8058684    | 3,51419683      | 12,7085327 0,1 |
| 10 | 0,03558195 | 0,173485728 | 10,8348796 | 0,34431882 | 12,5204328 | 0,23603255 | -2,80774329   | 3,5143025       | 12,7078428 0,2 |
| 11 | 0,04151228 | 0,173311195 | 10,8352109 | 0,34432837 | 12,5200056 | 0,2753737  | -2,80961825   | 3,51440806      | 12,7070275 0,2 |
| 12 | 0,04744261 | 0,173136662 | 10,8355418 | 0,3443379  | 12,5194543 | 0,31471447 | -2,81149329   | 3,51451351      | 12,7060867 0,3 |
| 13 | 0,05337293 | 0,172962129 | 10,8358723 | 0,34434742 | 12,5187791 | 0,35405449 | -2,81336841   | 3,51461886      | 12,7050206 0,3 |
| 14 | 0,05930326 | 0,172787596 | 10,8362026 | 0,34435694 | 12,5179799 | 0,39339337 | -2,81524359   | 3,51472411      | 12,703829 0,3  |
| 15 | 0,06523358 | 0,172613063 | 10,8365325 | 0,34436644 | 12,5170566 | 0,4327307  | -2,81711885   | 3,51482925      | 12,7025121 0,4 |
| 16 | 0,07116391 | 0,17243853  | 10,8368621 | 0,34437594 | 12,5160094 | 0,4720661  | -2,81899418   | 3,51493428      | 12,7010698 0,4 |
| 17 | 0,07709424 | 0,172263997 | 10,8371913 | 0,34438542 | 12,5148382 | 0,51139917 | -2,82086959   | 3,51503921      | 12,6995022 0,5 |
| 18 | 0,08302456 | 0,172089464 | 10,8375203 | 0,3443949  | 12,5135443 | 0,55072953 | -2,82274507   | 3,51514403      | 12,6978092 0,5 |
| 19 | 0,08895489 | 0,171914931 | 10,8378489 | 0,34440437 | 12,5121238 | 0,59005678 | -2,82462062   | 3,51524875      | 12,6959909 0,5 |
| 20 | 0,09488521 | 0,171740398 | 10,8381771 | 0,34441382 | 12,5105807 | 0,62938053 | -2,82649625   | 3,51535336      | 12,6940473 0,6 |
| 21 | 0,10081554 | 0,171565865 | 10,8385051 | 0,34442327 | 12,5089135 | 0,66870039 | -2,82837194   | 3,51545787      | 12,6919784 0,6 |
| 22 | 0,10674586 | 0,171391333 | 10,8388327 | 0,34443271 | 12,5071224 | 0,70801596 | -2,83024772   | 3,51556227      | 12,6897843 0,7 |
| 23 | 0,11267619 | 0,1712168   | 10,8391599 | 0,34444214 | 12,5052074 | 0,74732685 | -2,83212356   | 3,51566657      | 12,6874649 0,7 |
| 24 | 0,11860652 | 0,171042267 | 10,8394869 | 0,34445155 | 12,5031684 | 0,78663268 | -2,83399948   | 3,51577076      | 12,6850202 0,7 |

Si no existe conmensurabilidad entre los periodos de oscilación y rotación, el resultado es bastante más complejo y, en consecuencia, produce una mayor “sensación” al viajero, ya que la aceleración a que está sometido varía así como el ángulo de suspensión de la silla.

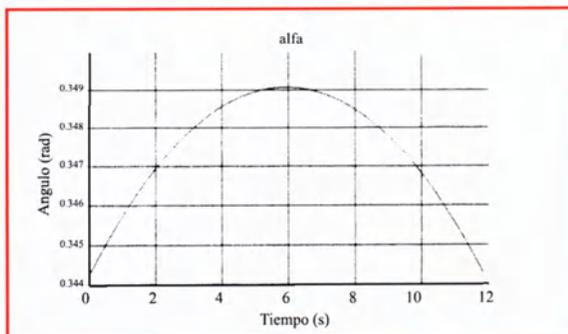


Figura 4. Ángulo de desviación de la vertical

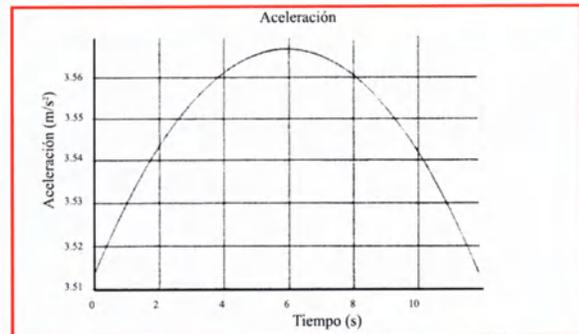


Figura 5. Aceleración centrípeta

# El Escorpión

## 1. IDEAS BÁSICAS<sup>16</sup>

Esta atracción es un ejemplo de movimientos circulares complejos. Se trata de unos cochecitos suspendidos de unos anillos al extremo de unos brazos que a su vez giran.

Aunque a este ejemplo se le puede aplicar todo lo dicho en otros ejemplos similares de movimiento circular, quizá su aplicación más interesante sea ilustrar el cálculo vectorial con algo que no sean fuerzas, a la par que el movimiento relativo.



Otro detalle interesante de esta atracción es que, en cierto sentido, reproduce la impresión que el movimiento de los planetas interiores provoca a un observador terrestre.

## 2. DESARROLLO FÍSICO MATEMÁTICO

### 2.1. Cálculo vectorial

En efecto, si se toma como origen de coordenadas el centro del sistema de brazos y como referencia unos ejes cartesianos horizontales, en todo instante la posición de un punto cualquiera vendrá determinada por su vector posición que a su vez es suma del vector posición del anillo al que se asocia el carrito, más el vector posición del carrito respecto al centro del anillo:  $r = r_1 + r_2$ .

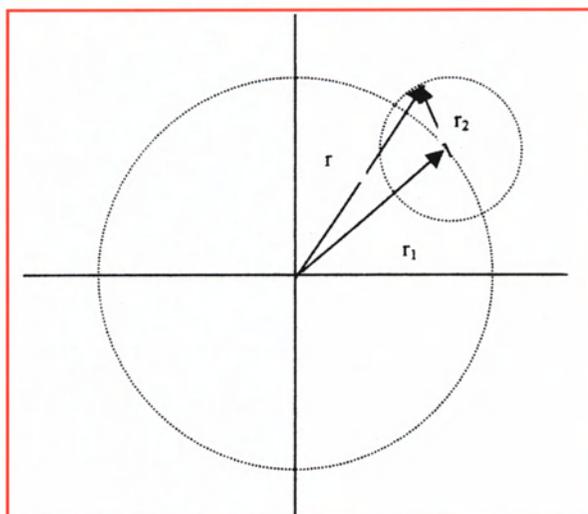


Figura 1. Diagrama vectorial del movimiento compuesto

<sup>16</sup> Esta atracción no figura en el cuaderno del alumno, pero es interesante para el profesor.

Las coordenadas de posición del punto de referencia respecto al origen fijo serán:

$$x = r_1 \cos \omega_1 t + r_2 \cos(\omega_2 t + f_0)$$

$$y = r_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + r_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + f_0)$$

siendo

- $\omega_1$ , la velocidad angular de los brazos principales respecto a su centro.
- $\omega_2$ , la velocidad angular del carrito respecto al centro del anillo.
- $f_0$ , el ángulo inicial de radio vector  $r_2$  respecto a  $r_1$ .

### 3. APLICACIÓN INFORMÁTICA

#### 3.1. Trayectoria

El primer tema que se plantea es: ¿qué trayectoria real describe el carrito?

Su determinación puede hacerse de forma simple mediante un sencillo programa de ordenador, sin embargo, aquí ha parecido conveniente utilizar la hoja Excel<sup>17</sup>.

| t     | w1         | w2         | x1         | y1         | x2 | y2         |
|-------|------------|------------|------------|------------|----|------------|
| 0     | 0          | 25         | 25         | 0          | 45 | 0          |
| 0,005 | 24,9998321 | 0,09162958 | 44,9981186 | 0,35342149 | 25 | 44,9995065 |
| 0,01  | 24,9993283 | 0,18325793 | 44,9924748 | 0,7067969  | 25 | 44,9980261 |
| 0,015 | 24,9984887 | 0,27488382 | 44,9830695 | 1,06008013 | 25 | 44,9955588 |
| 0,02  | 24,9973133 | 0,36650601 | 44,969904  | 1,41322514 | 25 | 44,9921046 |
| 0,025 | 24,9958021 | 0,45812328 | 44,9529806 | 1,76618587 | 25 | 44,9876636 |
| 0,03  | 24,9939551 | 0,5497344  | 44,9323018 | 2,11891632 | 25 | 44,9822359 |
| 0,035 | 24,9917724 | 0,64133813 | 44,9078709 | 2,47137051 | 25 | 44,9758217 |
| 0,04  | 24,9892539 | 0,73293325 | 44,8796918 | 2,82350252 | 25 | 44,9684211 |
| 0,045 | 24,9863997 | 0,82451852 | 44,8477688 | 3,17526647 | 25 | 44,9600343 |
| 0,05  | 24,9832098 | 0,91609272 | 44,8121071 | 3,52661656 | 25 | 44,9506614 |
| 0,055 | 24,9796844 | 1,00765461 | 44,7727121 | 3,87750705 | 25 | 44,9403028 |
| 0,06  | 24,9758234 | 1,09920296 | 44,7295902 | 4,22789226 | 25 | 44,9289585 |
| 0,065 | 24,9716268 | 1,19073654 | 44,682748  | 4,57772662 | 25 | 44,9166289 |
| 0,07  | 24,9670948 | 1,28225413 | 44,632193  | 4,92696464 | 25 | 44,9033143 |
| 0,075 | 24,9622274 | 1,3737545  | 44,577933  | 5,27556094 | 25 | 44,8890149 |
| 0,08  | 24,9570247 | 1,46523641 | 44,5199767 | 5,62347022 | 25 | 44,8737311 |
| 0,085 | 24,9514867 | 1,55669863 | 44,4583331 | 5,97064733 | 25 | 44,8574633 |
| 0,09  | 24,9456135 | 1,64813995 | 44,3930119 | 6,31704723 | 25 | 44,8402118 |
| 0,095 | 24,9394052 | 1,73955912 | 44,3240234 | 6,66262498 | 25 | 44,821977  |
| 0,1   | 24,9328619 | 1,83095493 | 44,2513785 | 7,00733583 | 25 | 44,8027594 |
| 0,105 | 24,9259837 | 1,92232614 | 44,1750884 | 7,35113513 | 25 | 44,7825594 |

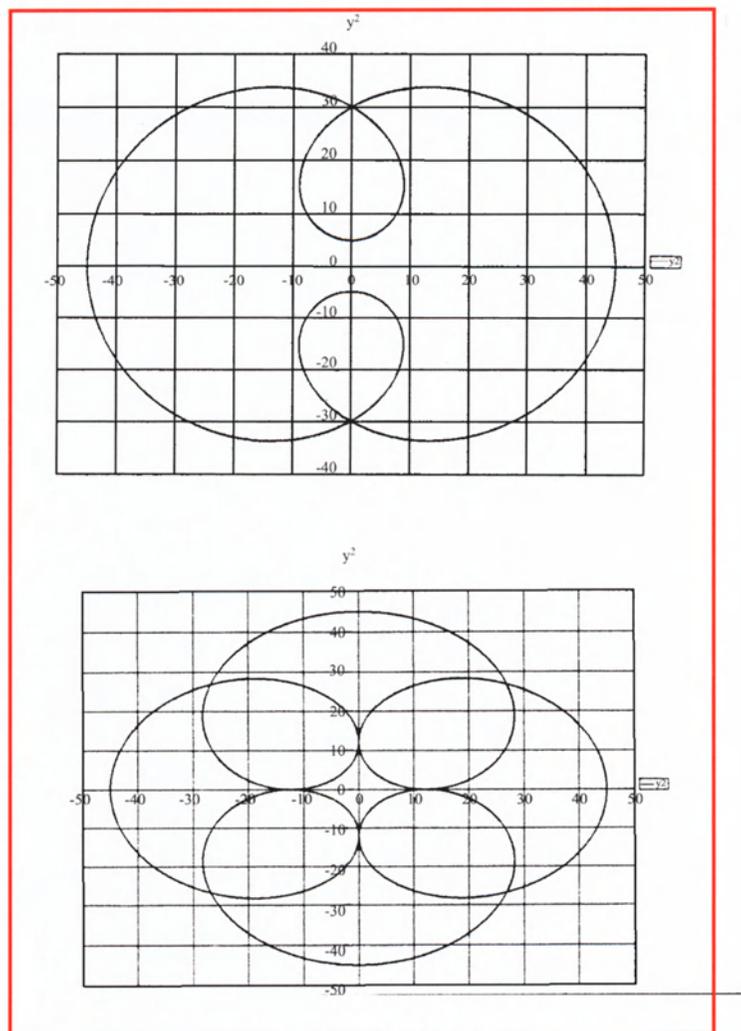
<sup>17</sup> En la atracción real se produce, además, un movimiento de subida, lo que permite un análisis tridimensional del problema. Para estos niveles este trabajo parece excesivo, sin embargo, en la aplicación informática podría agregarse una columna con la coordenada z y reconstruir el problema, tanto gráfica como analíticamente.

Para ello se ha programado una hoja en la que se ha dejado una línea de encabezamiento en la que se sitúan los valores de los parámetros  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , y  $f_0$ , de este modo es fácil introducir modificaciones en los datos del programa con respuesta inmediata. Se programa una columna con los tiempos y sendas columnas con  $x$  e  $y$ . La gráfica se obtiene de modo inmediato.

En realidad se ha introducido como parámetro fundamental la frecuencia respectiva y las velocidades angulares se calculan de modo automático; igualmente se ha calculado primero la posición del centro de cada anillo y, a partir de este, el del cuadrado, hallándose también el módulo del radio vector instantáneo.

La trayectoria presenta el siguiente comportamiento. Si las frecuencias son conmensurables, entonces la trayectoria es una curva cerrada con tantos lóbulos como la relación de frecuencias menos uno.

Sin embargo, si las frecuencias no son conmensurables, la curva puede que no se cierre nunca. En cualquier caso la trayectoria puede englobarse dentro del conjunto de curvas súper espirales. A continuación se ponen algunos ejemplos:



**Figura 2.** Algunas de las figuras descritas en el texto

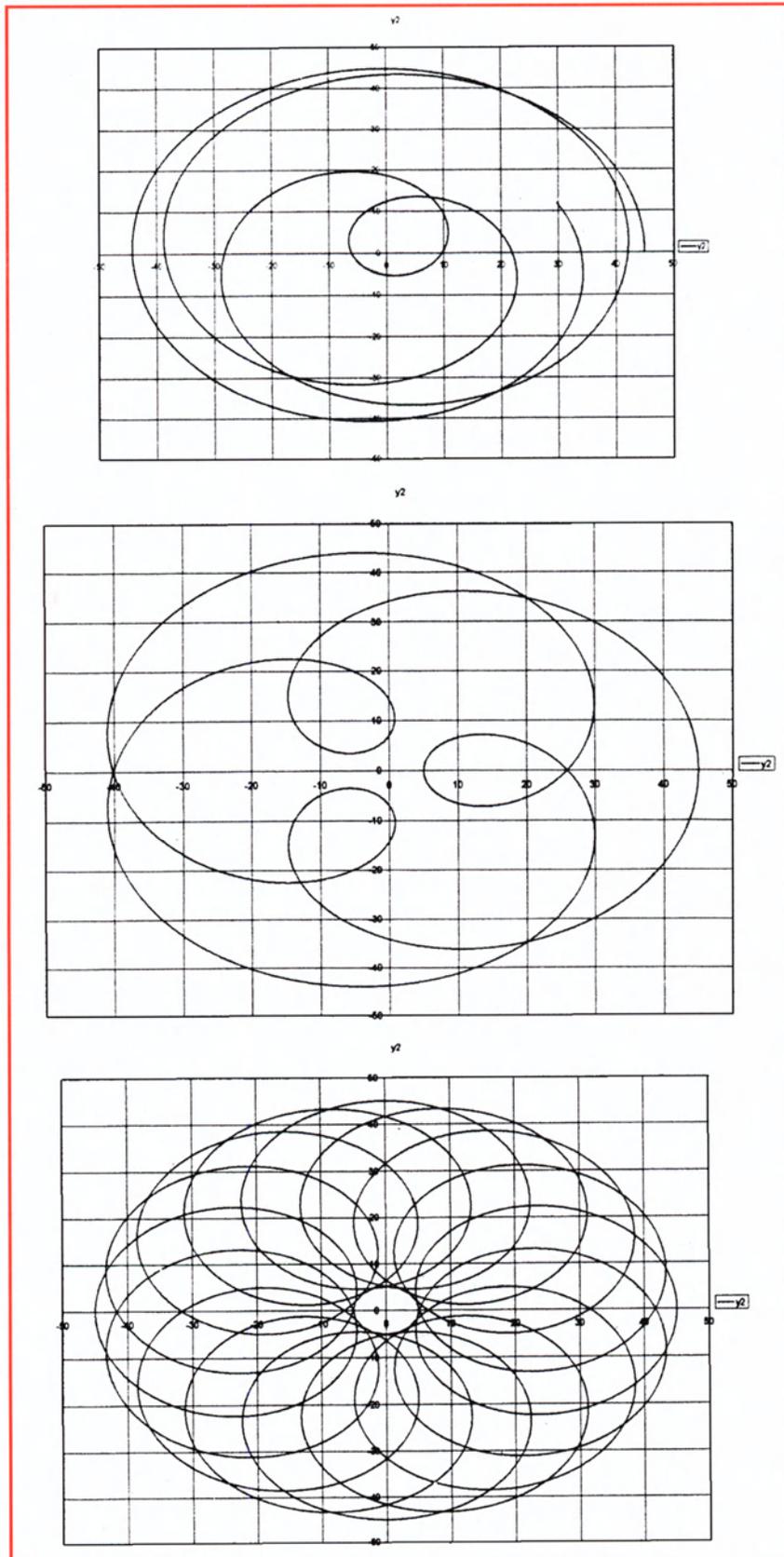


Figura 3. Algunas de las figuras descritas en el texto (continuación)

### 3.2. Velocidad

Por definición la velocidad

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

puede conseguirse de forma inmediata de las ecuaciones de posición. Su cálculo informático puede obtenerse directamente aproximando la derivada al cociente incremental.

### 3.3. Distancia recorrida por el móvil

En este ejemplo, como en muchos más, puede ser interesante el cálculo de la distancia que realmente recorre el viajero. El modo más simple es con la hoja de cálculo, tratar de sumar los incrementos "*infinitesimales*" de posición. Evidentemente se trata de un método muy aproximado, pero suficiente para lo que se pretende, que no requiere integrales complejas o razonamientos excesivos y que permite distinguir de modo claro "*desplazamiento*", "*posición*" y "*distancia recorrida*".

### 3.4. Aceleración

Es posible, en principio, calcularla por derivación, sin embargo, no se olvide que se trata de la observación desde una referencia inercial. Desde el punto de vista del viajero del carrito, observador no inercial, las cosas se complican y, dependiendo del nivel deseado, puede llegarse muy lejos: aceleración de Coriolis, por ejemplo. No parece que en este trabajo sea aconsejable profundizar tanto.

# ANEXOS

## Algunos instrumentos de medida sencillos





# 1. APARATO PARA ESTIMAR LAS DIMENSIONES DE UNA ATRACCIÓN

Muchas veces las dimensiones de una determinada atracción no son accesibles; en este caso es conveniente estimarlas. El sencillo aparato que se propone puede construirse por los propios estudiantes y, aunque de sencillo manejo, requiere hacer uso de algo de trigonometría.

## 1.1. MATERIAL QUE SE PRECISA

Los materiales necesarios son de fácil obtención:

- Una plomada que se construye con una tuerca y un pedazo de hilo de nylon (D).
- Un semicírculo graduado (C).
- Dos listones, uno de 1 m y otro de unos 30 cm (A y B).
- Un tornillo pasante con tuerca de mariposa y dos arandelas de metal.
- Dos puntas de carpintero.

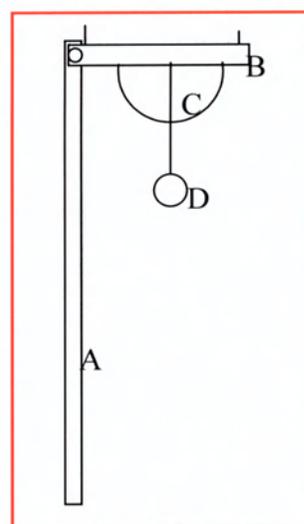


Figura 1. Esquema del aparato

## 1.2. CONSTRUCCIÓN

Se fija el semicírculo al listón corto sobre el que se habrán clavado perfectamente alineadas dos pequeñas puntas, que harán las veces de pínulas. La plomada se cuelga del centro geométrico del semicírculo.

El dispositivo se fija con el tornillo y la tuerca al listón largo.

## 1.3. MANEJO

Se apoya el listón largo en el suelo y, manteniéndolo vertical, se apunta con las dos puntas al extremo del objeto cuya altura se quiere estimar (Figura 2). La plomada proporciona el ángulo.

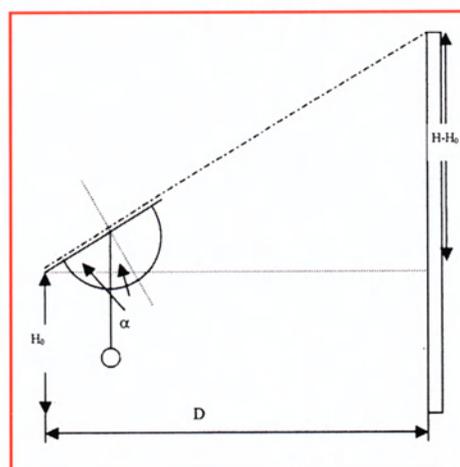
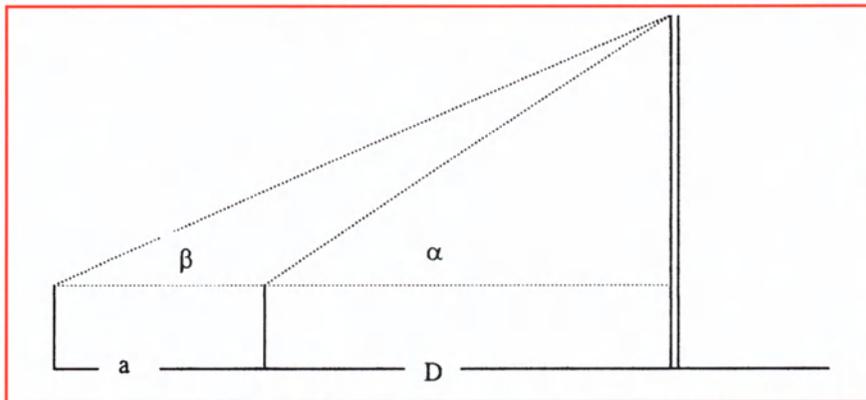


Figura 2. Esquema del funcionamiento del dispositivo

Si se conoce  $D$ , distancia a la base, el cálculo de  $H$  es fácil puesto que  $\tan \alpha = (H - H_0)/D$ .

En el caso de que la medida de  $D$  sea imposible, el problema se resuelve de modo fácil, midiendo la distancia entre los pies de dos puntos de vista diferentes (Figura 3).



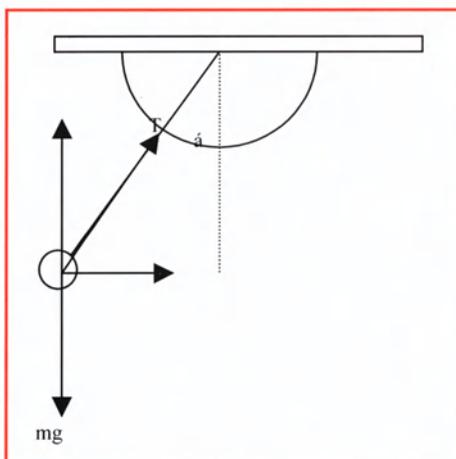
**Figura 3.** Esquema de operación cuando el pie del objetivo es inaccesible

Entonces  $\tan \alpha = (H - H_0)/D$ . Y  $\tan \beta = (H - H_0)/(D + a)$  con lo que el cálculo de  $H$  es inmediato y además también es posible determinar  $D$ .

Con un poco de ingenio puede utilizarse para estimar dimensiones horizontales. Basta con apuntar a un extremo del objetivo y, sin cambiar la inclinación, apuntar al otro y medir el ángulo formado por ambas direcciones.

El aparato en cuestión puede utilizarse también como acelerómetro, al menos en movimientos horizontales. En efecto, en el momento en que el vehículo acelera, la plomada se desvía de su vertical.

Observando el diagrama de fuerzas (Figura 4) es inmediato comprobar que  $T \cos \alpha = mg$  y que  $T \sin \alpha = ma$  de donde  $a = g \tan \alpha$ , siendo  $T$  la tensión del hilo,  $m$  la masa de la plomada,  $g$  la aceleración de gravedad y  $a$  la aceleración con que se mueve el móvil, que es proporcional a la tangente del ángulo que forma la plomada con la vertical.



**Figura 4.** Esquema del acelerómetro

En los centros existen teodolitos baratos de plástico de precisión bastante aceptable, sin embargo, no pueden usarse como acelerómetros. Suelen pertenecer a departamentos de Matemáticas y no aportan el valor formativo de su construcción.

Como acelerómetro puede emplearse un dinamómetro que puede adquirirse por poco dinero en tiendas especializadas, del que se suspenderá una bola de acero de masa<sup>18</sup> conocida. Sobre todo en atracciones como la Lanzadera, es de especial interés que los estudiantes lo utilicen.

<sup>18</sup> Una vez más recordar que debe insistirse en la diferencia entre peso y masa, por la confusión de ambos términos en el lenguaje coloquial. Esta distinción debe, precisamente por eso, recalcarse en la terminología y en las unidades.

Puede hacerse una buena observación acoplando el aparato a una cámara de vídeo, que se estabilizará lo más posible. De este modo puede seguirse el proceso a cámara lenta. Se observa fácilmente que en caída libre el aparato marca cero.

## 2. APARATO PARA ESTIMAR LA FUERZA CENTRÍFUGA

Aunque en este trabajo se ha procurado tomar siempre como referencia el sistema inercial, a veces, es más intuitivo el no inercial. Como es sabido, la aplicación de estos sistemas requiere la introducción de las llamadas fuerzas ficticias de inercia, para poder aplicar las ecuaciones newtonianas.

La fuerza centrífuga es una de las más tratadas. Aunque es evidente en muchos móviles, siempre que su trayectoria sea circular, puede simularse con un sencillo instrumento.

### 2.1. MATERIAL QUE SE PRECISA

- Bramante.
- Dos masas, a poder ser iguales. Sirven por ejemplo dos gruesas tuercas.
- Un canuto de unos 15 cm de largo.
- Dinamómetro.

### 2.2. FUNCIONAMIENTO

En el esquema (Figura 5) se observa el funcionamiento del dispositivo. Aplicando un balance de fuerzas a cada uno de los cuerpos y suponiendo masas iguales, se tiene:

Cuerpo  $A$ , en rotación

$$T - m\omega^2 r = ma$$

$$Mg - T = ma, \text{ lo que conduce a } \ddot{r} = \frac{g - \omega^2 r}{2}$$

Esta ecuación, cuya integración escapa a los conocimientos exigibles a un estudiante de Bachillerato, se puede analizar de un modo cualitativo. En efecto, existe una velocidad angular para la cual la aceleración es cero, es decir, de un modo práctico, el radio de giro permanece constante (en rigor varía su longitud a velocidad constante, pero en la práctica, si no se comunica ninguna velocidad inicial, es constante). Por lo tanto la masa suspendida ni sube ni baja. Superado este límite, tiende a ascender y si no se alcanza, a bajar. El problema puede analizarse con una simulación informática.

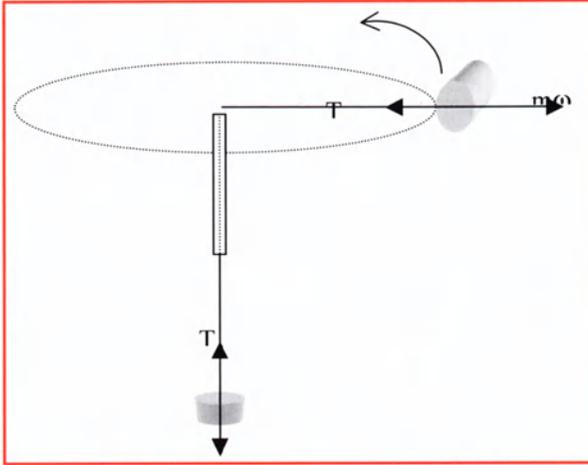


Figura 5. Esquema del dispositivo

Para ello se creará una tabla en la que se introducirán los parámetros de frecuencia, radio, incremento temporal y masa de las partículas. Se creará la correspondiente columna de tiempo y las correspondientes  $a$ ,  $r$ ,  $h$ ,  $T$ ,  $a_c$ ,  $r'$  y  $r''$ ,  $r'_i = r'_{i-1} + r'' dt$ ;  $r_i = r_{i-1} + r'_{i-1} dt$ . Con *solver*, por ejemplo, puede ajustarse la frecuencia para la cual  $a_c = 0$  y sobre ella ensayar distintos valores.

En las gráficas (Figuras 6, 7 y 8) se ve la trayectoria de la partícula en giro para velocidades angulares superior, inferior o igual a la crítica.

| 1  | f          | w          | r0         | h0         | dt         | m          |            |            |  |
|----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--|
| 2  | 0,71       | 4,46106157 |            | 0,5        | 1          | 0,00140845 | 0,5        |            |  |
| 3  | t          | r          | h          | T          | ay         | Vy         | x          | y          |  |
| 4  | 0          | 0,5        | 1          | 0,07526758 | 0,07526758 | 0          | 0,5        | 0          |  |
| 5  | 0,00140845 | 0,50000015 | 1,00000015 | 0,07526758 | 0,07526758 | 0,00010601 | 0,49999028 | 0,00314157 |  |
| 6  | 0,0028169  | 0,50000045 | 1,00000045 | 0,07526906 | 0,07526906 | 0,00021202 | 0,49996097 | 0,00628303 |  |
| 7  | 0,00422535 | 0,5000009  | 1,0000009  | 0,07527204 | 0,07527204 | 0,00031804 | 0,49991207 | 0,00942424 |  |
| 8  | 0,0056338  | 0,50000149 | 1,00000149 | 0,07527649 | 0,07527649 | 0,00042406 | 0,49984359 | 0,01256509 |  |
| 9  | 0,00704225 | 0,50000224 | 1,00000224 | 0,07528244 | 0,07528244 | 0,0005301  | 0,49975552 | 0,01570545 |  |
| 10 | 0,0084507  | 0,50000314 | 1,00000314 | 0,07528987 | 0,07528987 | 0,00063614 | 0,49964787 | 0,01884521 |  |
| 11 | 0,00985915 | 0,50000418 | 1,00000418 | 0,07529878 | 0,07529878 | 0,00074219 | 0,49952064 | 0,02198424 |  |
| 12 | 0,01126761 | 0,50000538 | 1,00000538 | 0,07530918 | 0,07530918 | 0,00084826 | 0,49937385 | 0,02512243 |  |
| 13 | 0,01267606 | 0,50000672 | 1,00000672 | 0,07532107 | 0,07532107 | 0,00095435 | 0,49920748 | 0,02825965 |  |
| 14 | 0,01408451 | 0,50000821 | 1,00000821 | 0,07533445 | 0,07533445 | 0,00106045 | 0,49902156 | 0,03139578 |  |
| 15 | 0,01549296 | 0,50000986 | 1,00000986 | 0,07534931 | 0,07534931 | 0,00116658 | 0,49881609 | 0,03453069 |  |
| 16 | 0,01690141 | 0,50001165 | 1,00001165 | 0,07536566 | 0,07536566 | 0,00127273 | 0,49859107 | 0,03766428 |  |
| 17 | 0,01830986 | 0,50001359 | 1,00001359 | 0,07538349 | 0,07538349 | 0,0013789  | 0,49834651 | 0,04079641 |  |
| 18 | 0,01971831 | 0,50001568 | 1,00001568 | 0,07540282 | 0,07540282 | 0,0014851  | 0,49808243 | 0,04392698 |  |
| 19 | 0,02112676 | 0,50001792 | 1,00001792 | 0,07542363 | 0,07542363 | 0,00159133 | 0,49779883 | 0,04705584 |  |
| 20 | 0,02253521 | 0,50002032 | 1,00002032 | 0,07544594 | 0,07544594 | 0,00169759 | 0,49749572 | 0,0501829  |  |
| 21 | 0,02394366 | 0,50002286 | 1,00002286 | 0,07546973 | 0,07546973 | 0,00180389 | 0,49717312 | 0,05330801 |  |
| 22 | 0,02535211 | 0,50002555 | 1,00002555 | 0,07549501 | 0,07549501 | 0,00191022 | 0,49683104 | 0,05643108 |  |
| 23 | 0,02676056 | 0,50002839 | 1,00002839 | 0,07552178 | 0,07552178 | 0,00201659 | 0,49646949 | 0,05955196 |  |
| 24 | 0,02816901 | 0,50003138 | 1,00003138 | 0,07555004 | 0,07555004 | 0,002123   | 0,49608848 | 0,06267055 |  |
| 25 | 0,02957746 | 0,50003452 | 1,00003452 | 0,07557979 | 0,07557979 | 0,00222945 | 0,49568803 | 0,06578672 |  |

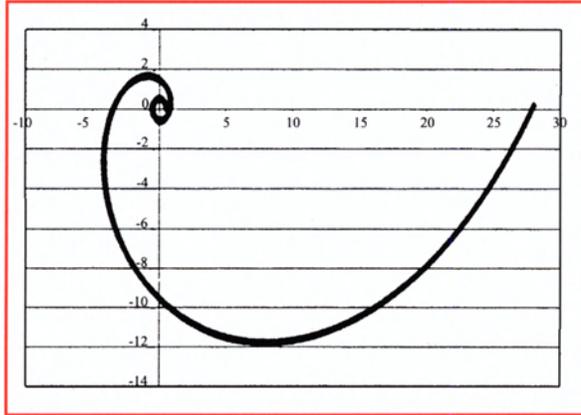


Figura 6. Trayectoria  $\omega > \omega_{critica}$

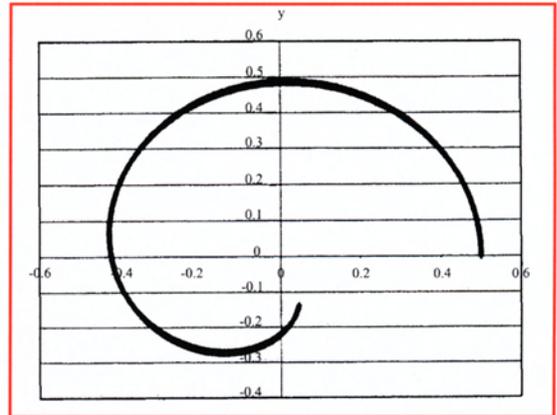


Figura 7. Trayectoria  $\omega < \omega_{critica}$

Se  
ha

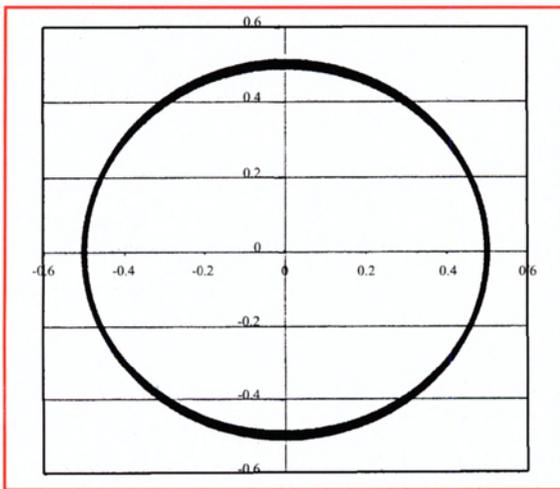


Figura 8. Trayectoria  $\omega = \omega_{critica}$

trabajado con velocidad angular constante. Un ejercicio interesante puede ser repetir la simulación para momento angular constante.

Puede hacerse una medida cuantitativa fijando un dinamómetro al bramante.



# Normas generales para la aplicación de la hoja Excel

## 1. IDEAS GENERALES SOBRE LA HOJA DE CÁLCULO Y SU UTILIZACIÓN

La hoja de cálculo es una gigantesca matriz formada por celdas o casillas distribuidas en filas y columnas.

En cada celda puede introducirse tres tipos de información: texto, números y fórmulas.

Cada celda se designa por sus ordenadas en la hoja: letra de columna y número de fila; así, por ejemplo, la celda A1 sería la correspondiente al ángulo superior izquierdo.

Las celdas se agrupan en bloques, que son un conjunto rectangular y continuo de celdas, es decir, una submatriz. En Excel, y más o menos de modo semejante en otras, se nombra por la “*celda superior izquierda : inferior derecha*” así por ejemplo (A1:B12)

Pueden a su vez agruparse celdas o bloques utilizando, en la configuración de teclado español;. Así por ejemplo (A1:B12;C3;C5;H1:G10) agruparía los bloques (A1:B12) y (H1:G10) con las celdas individuales C3 y C5.

Dentro de las múltiples capacidades que tiene la hoja, la primordial es el cálculo. Esta capacidad se desarrolla mediante “*fórmulas*”; estas fórmulas pueden ser de dos tipos: las de librería, por tanto ya predeterminadas por la propia hoja, y las creadas por el usuario.

Las primeras pueden aplicarse directamente, siguiendo una sintaxis relativamente fácil o haciendo uso del asistente de funciones que normalmente tiene un manejo muy sencillo y permite la introducción sin errores de la fórmula deseada. Estas fórmulas o funciones a grandes rasgos pueden ser matemáticas (seno, coseno, Ln, etc.), estadísticas (promedio, desviación típica...), lógicas, de texto, incluso pueden definirse por el usuario mediante el lenguaje de macros o directamente en un dialecto de visual Basic que incluye la hoja.

También pueden combinarse en una fórmula o función diferentes fórmulas.

La característica fundamental de estas funciones es que normalmente se refieren a celdas de la hoja de cálculo, de modo que combina la información contenida en estas celdas.

La referencia a celda es, por tanto, tal vez la característica más potente de la hoja, puesto que modificando el contenido de esta celda de referencia se modifican de modo automático los resultados de las funciones que las contienen.

Esta referencia de celda puede ser relativa o absoluta.

En referencia relativa, si una determinada fórmula se copia a una celda diferente de aquella en la que fue creada, las celdas de referencia cambian también conservando la misma posición relativa respecto a la celda objetivo. Así, por ejemplo, si en la celda C3 se tiene definida la función  $A3 + B3$  y se copia esta fórmula en la celda H5, la fórmula que aparecerá por defecto será  $F5+G5$ . Sin embargo, puede ser que el contenido de una celda deba ser el mismo, no importa donde se copie la función; en este caso cabrá hablar de una referencia absoluta. Ello se indica mediante el símbolo "\$" antepuesto a la letra de la columna, de modo que entonces queda esta fija al copiar la fórmula, o al número de la fila, con análogos resultados. Si se utiliza en ambos casos queda fijada la celda de referencia.

Esta propiedad es muy útil cuando se desea introducir unos parámetros que deben permanecer constantes, por ejemplo, la velocidad inicial o la aceleración de la gravedad en un problema que simule la caída de un objeto.

La extensión de una fórmula es la copia de la misma a una serie de casillas de un bloque. Puede hacerse de forma rápida por diferentes métodos ya sea utilizando el botón de copia rápida, ya extendiendo con el ratón, ya marcando un bloque y pulsando las teclas "Control +j".

En la hoja sólo existe una única celda activa en la que se introduce la información que se escribe en el teclado.

Cuando esta es una fórmula, es normal que en la celda aparezca el resultado, mientras que en la barra de fórmulas que aparece en el encabezado del documento, que en este caso se llama "*libro*" y puede estar formado por varias hojas, aparezca la fórmula que puede ser corregida.

Excel no es sensible a mayúsculas o minúsculas, sin embargo, cuando acepta una fórmula la escribe de modo automático en mayúsculas, propiedad que puede ser utilizada para verificar la corrección sintáctica de lo que se escribe.

Además Excel incluye herramientas más elaboradas como diferentes tratamientos estadísticos de datos: regresión, análisis de varianza, análisis estadístico y la utilidad *solver*.

Esta utilidad permite obtener el máximo, el mínimo u obligar a que una función tome un determinado valor, definiendo esta función en una determinada celda. Esta solución se obtiene modificando el contenido de una serie de celdas de referencia, definidas por el usuario. Además es posible aplicar restricciones, no solamente lineales, de modo semejante al conocido algoritmo del simplex. También es posible controlar el número y la sensibilidad de las *iteraciones* que utiliza el programa para obtener el resultado.

Otra utilidad es la posibilidad de construcción de gráficas. Excel permite múltiples tipos de gráfico y los presenta en general de modo excelente. Por defecto ajusta las escalas a la mejor presentación posible, sin embargo es posible modificar estas presentaciones.

Dentro del mundo gráfico y entre otras utilidades está la posibilidad de ajustar una nube de puntos a una función determinada; es lo que Excel denomina agregar líneas de tendencia. En este caso Excel propone diferentes líneas: lineal, exponencial, potencial, logarítmica, media móvil, polinómica con grado determinado por el usuario. Permite obligar a que la gráfica pase por un punto fijo y puede presentar la ecuación y el coeficiente  $R^2$ , aunque para un tratamiento más detallado está la utilidad de regresión.

Entre los inconvenientes que presenta la hoja, al menos en muchas de sus versiones, es la imposibilidad de hacer gráficos en series de más de 4000 puntos, problema corregido en la última versión, así como la de dibujar diagramas XYZ. Este último particular tienen fácil solución, pudiéndose dibujar una perspectiva isométrica introduciendo unas variables auxiliares definidas como  $x' = (y - x) \cos \pi/6$ ;  $y' = z - (y+x) \sin \pi/6$ .

También inserta automáticamente líneas de tendencia, mediante una regresión, dando la ecuación de la línea y el coeficiente estadístico  $R^2$ , sin embargo, en algunas versiones y para algunas regresiones no lineales, realiza un praso previo de conversión de escala que no deshace después, lo que puede inducir a error si no se tiene la precaución de restaurar la escala original.

Aunque las versiones actuales no incluyen herramientas de integración o derivación, debido a la sencillez de sintaxis y a la rapidez de cálculo de la hoja, son fácilmente implementables métodos numéricos de integración o derivación.

## 2. APLICACIÓN EN ESTE TRABAJO

Conscientes del elevado potencial de cálculo de la hoja así como de su facilidad de manejo, tanto en el campo analítico como gráfico, especialmente para la simulación de muchos de los problemas que las atracciones del parque pueden sugerir, vaya una idea general del modo de aplicación que se ha seguido, y que la experiencia docente de los autores demuestra como muy efectivo, a la par que sencillo.

Se prepara una fila de datos técnicos, en función de los cuales se desarrollará la simulación. De este modo se pretende poder variar estos datos y obtener un resultado inmediato.

La norma general consiste en desarrollar en el tiempo el problema, por ello se deja como parámetro el incremento temporal con el que se reconstruirá la escala de tiempo.

En los movimientos circulares se suele dejar como parámetro bien el periodo, bien la frecuencia, porque son los parámetros más fácilmente medibles con un simple cronómetro.

La columna de tiempos se construye a partir del incremento temporal y se fija en unos 2000 valores, número suficientemente grande como para dar una buena información y permitir aproximaciones del diferencial por el incremento y todavía manejable.

Se procura introducir las fórmulas del modo más sencillo. En general, es más instructivo introducir las ecuaciones diferenciales "*avant la lettre*" que las fórmulas integradas.

Es muy recomendable que todas las magnitudes vengan rotuladas con sus correspondientes unidades, a poder ser Sistema Internacional de Unidades.

El principal inconveniente del método es que dados los incrementos temporales que se manejan, los errores de truncamiento son muy pequeños, sin embargo, pueden aparecer errores de redondeo. A nosotros no nos han aparecido.

Los gráficos bidimensionales son sencillos, se recomienda rotular adecuadamente los ejes.

Los gráficos tridimensionales, como ya se ha dicho, se han resuelto mediante la introducción de dos variables ficticias, obtenidas por perspectiva isométrica.

Estas variables son:

$$x' = (y - x) * \cos(\pi/6)$$

$$y' = z - (x + y) * \sin(\pi/6).$$

$x, y, z$  son las coordenadas cartesianas normales.

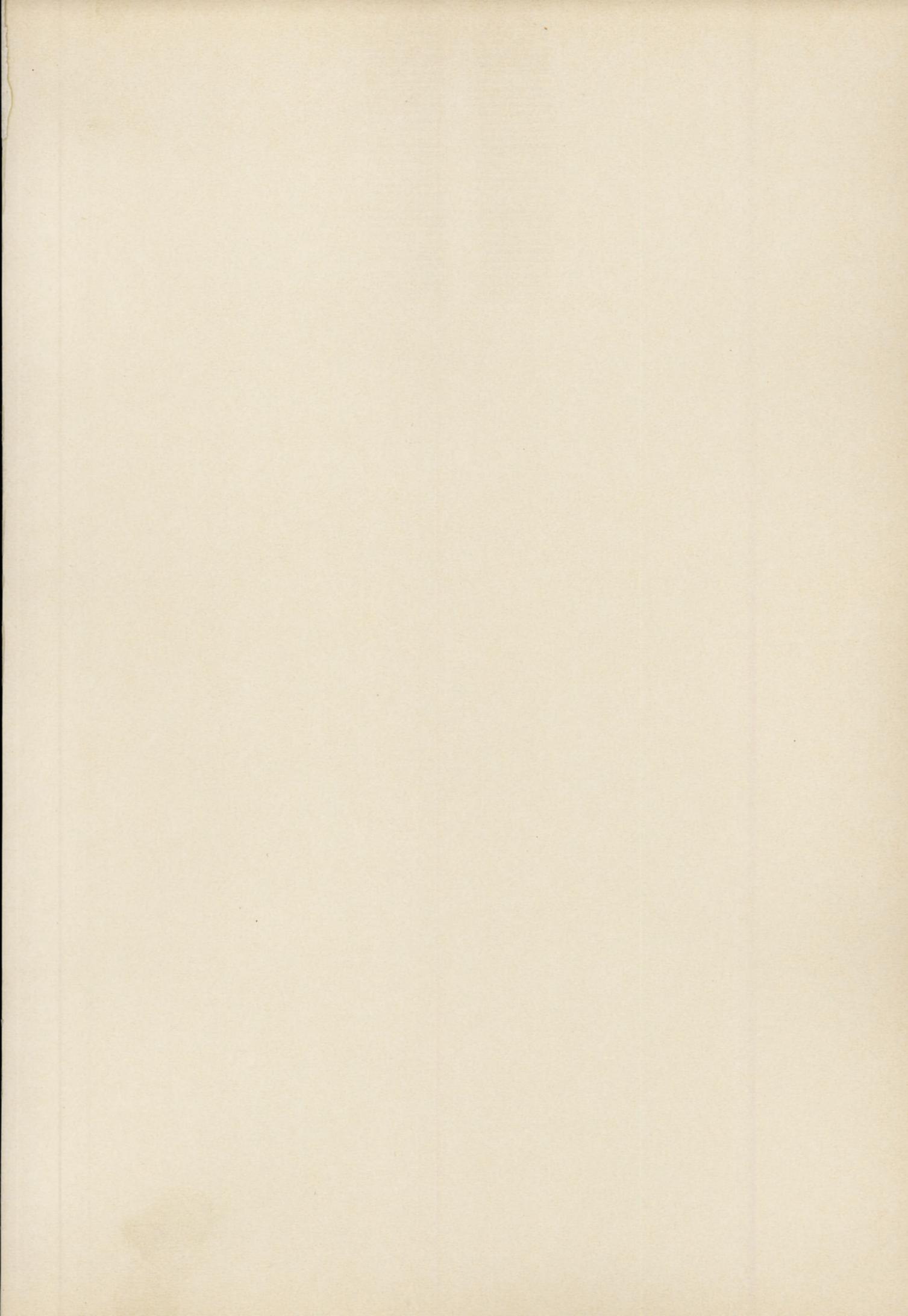
Evidentemente en esta representación habrá que reestructurar los ejes.

También puede usarse algún programa gráfico del tipo "*Sigmaplot*" o similar o incluso programas de la potencia de "*Matlab*" o "*Mathematica*", pero pensamos que se salen de los límites de esta propuesta.

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- ADAMS, JUDITH A. *The American Amusement Park Industry*. Twayne. 1991.
- ALONSO, M. FINN, E. *Física*. Fondo Educativo Interamericano. México. 1976.º
- BRÚ VILLASECA, LUIS. *Mecánica*. Romo. Madrid. 1963.
- BÚTIKOV, E. BÍKOV, A Y KONDRÁTIEV, A. *Física en ejemplos y problemas*. Mir. Moscú. 1991.
- C.I.T. Colección de Vídeos "El Universo Mecánico". Lecciones 2, 6, 9, 10, 13, 14 y 15. Arait. Madrid.
- CALVANI, PAOLO. *Juegos Científicos*. Pirámide. Madrid 1988.
- ESCOBAR, CAROLE. *Amusement Park Physics*. "The Physics Teacher" (28:446) Oct. 1990.
- FERNÁNDEZ-RAÑADA, A. (Editor) *Física Básica*. Alianza. Madrid. 1993.
- LÈVI-LEBLOND, J.M. *La Física en Preguntas (Mecánica)*. Alianza.Madrid. 1988.
- MARTÍNEZ PONS, JOSÉ A. *La hoja de cálculo como auxiliar en la docencia de la Física*. CPR Arganda. 1998.
- MCGEHEE, JOHN. *Physics student day at six flags*. "The Physics Teacher" (26:12 ) Ene. 1988.
- REDACCIÓN. *La física del balanceo*. *Ciencia y sociedad*. "Investigación y Ciencia". N°9. Jun. 1977.
- ROEDER, JOHN. *Amusement Park Physics*. "The Physics Teacher" (13:227) Sept. 1975.
- TAYLOR, GEORGE. *A physics laboratory at six flags over Georgia*. "The Physics Teacher" (22:361) Sept. 1984.
- TIPPLER, PAUL A. *Física*. Reverté. Barcelona. 1994.
- UNESCO. *Nuevo manual de la UNESCO para la enseñanza de las Ciencias*. Edhasa. Madrid. 1982.
- WALKER, JEARL. *Cómo reflexionar sobre física con los pelos de punta (subido en las montañas rusas)*. "Investigación y Ciencia". N°87. Dic. 1983.
- WALKER, JEARL. *Mantener el movimiento de un columpio. Lección primera de la mecánica de rotación*. "Investigación y Ciencia". N° 152. May. 1989.
- YAVORSKY, B.M. PINSKI A.A. *Fundamentos de Física*. Mir. Moscú. 1983.







**Comunidad de Madrid**

**CONSEJERIA DE EDUCACION**

Dirección General de Ordenación Académica