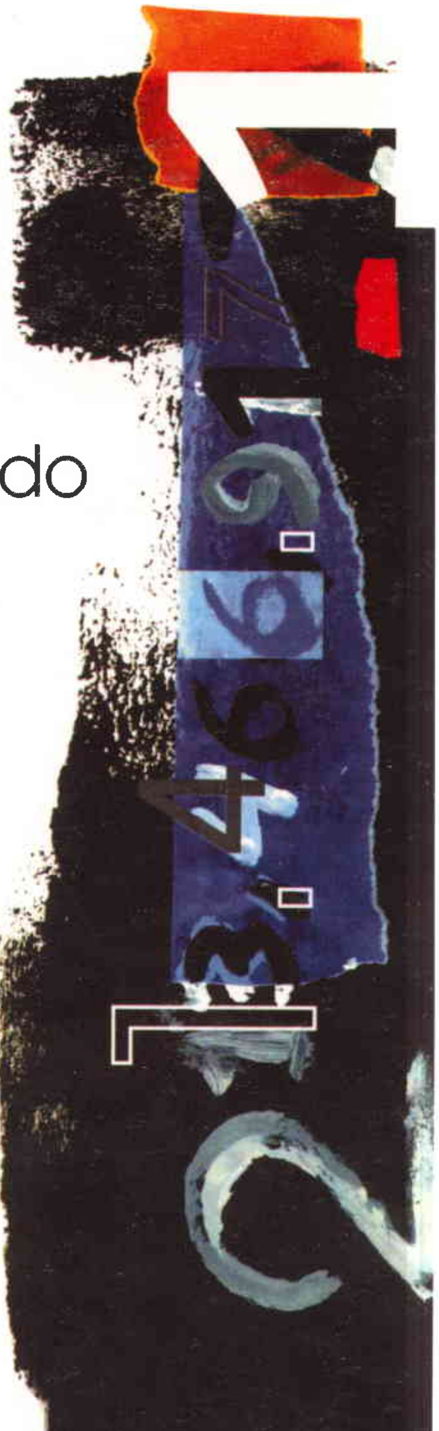
Actas III Jornadas Provinciales de Matemáticas. Encuentros del profesorado de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

Actas III Jornadas Provinciales de Matemáticas



Encuentros del profesorado de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

Comunidad de Madrid
CONSEJERIA DE EDUCACION
Dirección General de Ordenación Académica

Actas III Jornadas Provinciales de Matemáticas

Encuentros del profesorado de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

Madrid, primavera de 2002

Comunidad de Madrid
CONSEJERIA DE EDUCACION
Dirección General de Ordenación Académica

ENCUENTROS DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Coordinan: CAP Latina-Carabanchel - CRIF Las Acacias.
Colaboran: CAP de la Comunidad de Madrid.

PUBLICACIÓN

Coordinación técnica: María Jesús Luelmo, Adela Madroñero

Ilustración del cartel de portada: Aitor Echevarría

Comité organizador: Adela Madroñero (CAP Latina-Carabanchel), Macario Gallego (CRIF Las Acacias), Javier Bargueño (CAP Retiro), María Jesús Luelmo (CAP Ciudad Lineal), Juan Torres (CAP Arganda)

Tirada: 2.500 ejemplares
Edición: 10/03
Depósito legal: M-39.872-2003
I.S.B.N.: 84-451-2537-0
Imprime: **B.O.C.M.**

ÍNDICE

Educación Primaria

Educación Secundaria

PRESENTACIÓN

Estas Terceras Jornadas del Profesorado de Matemáticas de la Comunidad de Madrid consolidan la trayectoria iniciada por esta Dirección General en el año 2000, declarado por la UNESCO *Año Mundial de las Matemáticas AMM2000*, sobre el importante papel que juega esta disciplina en la vida cotidiana de las personas, en la construcción de la cultura y de la tecnología y, por otra parte, sobre la problemática específica de su enseñanza y aprendizaje.

La Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, en su momento, compartió y apoyó estos objetivos, consciente del profundo calado de los mismos y mantiene ahora la necesidad de continuar en esa línea. En efecto, en una sociedad democrática y tecnológicamente avanzada, cuyos ciudadanos reciben formación escolar hasta, al menos, los 16 años, las Matemáticas han de constituir uno de los basamentos de esta formación.

El objetivo más ambicioso de estas III Jornadas ha sido fomentar la participación y el contacto entre el profesorado de las tres Etapas educativas: Infantil, Primaria y Secundaria. Una de las características de la educación matemática y que la dificulta especialmente, es la lentitud del proceso de gestación de los conceptos matemáticos por parte de alumnos y alumnas. Las ideas numéricas y espaciales, el desarrollo lógico, las actitudes hacia las Matemáticas, por citar algunos ejemplos, aparecen ya en los primeros años de la vida de un niño o niña, y se van refinando a lo largo de toda su escolarización. Del acierto de la secuencia a lo largo de las diferentes Etapas, del engarce adecuado entre unas y otras, depende en gran medida el éxito final. Y para ello, es necesario que el profesorado de cada una de estas Etapas tenga oportunidades de conocer, de primera mano, los objetivos y logros de las demás, lo que es deseable y esperable en cada una, lo que podría mejorarse entre todos.

La comisión organizadora de estas Jornadas ha trabajado de modo especial para hacer realidad este objetivo, contando con la estrecha colaboración de las Asesorías de Infantil, de Primaria y de Ámbito Científico-Tecnológico de los Centros de Apoyo al Profesorado. Incluso, desde el primer momento, se quiso poner de relieve, de modo simbólico, la importancia de todas las Etapas educativas y, para ello, se decidió que cada uno de los días de los tres que constituyeron las Jornadas, se celebrara en un tipo de centro de diferente: una Facultad universitaria, un Instituto de Secundaria y un Colegio de Infantil y Primaria.

En el ámbito de los contenidos, las conferencias plenarias también se eligieron de modo que abordaran temas de interés común, tratando longitudinalmente algún aspecto matemático central, como son las proporciones y el razonamiento, o de especial novedad, como los aspectos afectivos del aprendizaje.

El resultado de estos esfuerzos ha sido alentador, y las Jornadas han contado con una presencia importante y activa de profesorado de las tres Etapas, siendo muestra de ello la equilibrada presencia de ponencias y comunicaciones en estas Actas que ahora tenemos la satisfacción de presentar. A todas las personas que, con su contribución, las han hecho posible, nuestro reconocimiento y gratitud.

Esperamos que la perspectiva de unas IV Jornadas, que se celebrarán en el curso 2003-2004, animen al profesorado a seguir en este camino de superación constante tanto en su propia formación como en el trabajo diario en el aula.

Jose María de Ramón Bas
Director General de Ordenación Académica

CONFERENCIAS

CQD: CÓMO QUISIÉRAMOS DEMOSTRAR. LAS DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS Y LAS ETAPAS EDUCATIVAS

Claudi Alsina
Universitat Politécnica de Catalunya

PRESENTACIÓN

En la enseñanza de las Matemáticas el tema de demostrar es un reto transversal para todos los niveles, que a menudo fluctúa entre el olvido más radical y la perseverancia más exagerada. Mucho me complacería aportar en esta conferencia un poco de luz docente a este tema.

PUESTA EN ESCENA

Fondo musical: *Lo que el viento se llevó.* Tema de Tara (M. Steiner), Westminter Philarmonic.

Escarlata: "¡Oh! Red. Nuestro mundo se tambalea. Tantos cambios. Tantas reformas... ¿y las demostraciones? ¿Dónde están las demostraciones?".

Red: "Las demostraciones, querida, el viento se las llevó".

Escarlata: "Lo están destruyendo todo. No calculan, no memorizan las tablas, no recitan los axiomas de Euclides... ¿A dónde iremos a parar?...".

Red: "Peor que nosotros no creo que salgan, Escarlata. Nosotros no aprendimos nada. Fuimos cotorras de tablas y palabras, pero nada más".

Escarlata: "¡Oh Red! Pero, ¿y aquellas clases donde todos aprendíamos que la suma de los catetos es la hipotenusa...? El sur se hunde y con los vientos del norte ya no quedará ni rastro de aquella enseñanza...".

Red: "Siempre fuiste sorprendente querida. ¿Qué valor tuvo para nuestras vidas saber que tres puntos cualesquiera determinan una recta?".

Escarlata: "¡Oh! Red, claro que tuvo valor. Nosotras sabíamos que tres puntos cualesquiera determinan una recta. Pero los otros no lo sabían... y ahí estaba la diferencia con los que fuimos a la escuela".

Red: "Querida, tú nunca fuiste a la escuela. Tú siempre tuviste una tutora en Tara...".

Escarlata: "No me intentes confundir con tus palabras. A Dios pongo por testigo que vamos a seguir demostrando. Aunque tengamos que reír o llorar. A Dios pongo por testigo que nunca más dejaremos teoremas sin pruebas...".

CARIÑO... ¡DEMUÉSTRAME QUE ME AMAS!

En este primer apartado nos gustaría resaltar los muchos significados que el verbo demostrar tiene en los ámbitos sociales y profesionales mas diversos. Parece que, hoy, demostraciones de todo tipo forman ya parte de la vida de las personas.

La demostración en el ámbito social

La sociedad en general hace usos diversos del término demostración. En un sentido pragmático, demostrar es realizar la acción efectiva que evidencia aquello que se pretende ver. Este es el caso del aforismo popular *el movimiento se demuestra andando* o del compasivo *con todo lo que ha aguantado demuestra tener paciencia.* Lamentablemente a partir de un sólo ejemplo y a través de la expresión *esto demuestra que...* se sacan conclusiones universales. Esta debilidad es explotada por el mundo de la publicidad donde un sólo ejemplo aparece como *demostración* de que un producto funciona, una crema rejuvenece, o un licor gusta más que otro.

La demostración en el ámbito filosófico

En la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, reluce con gran esplendor cognitivo la *demostración* como derivación de un enunciado a partir de otros enunciados (llamados *premisas*), mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas en *una búsqueda razonable de la verdad.*

La demostración en el ámbito religioso

En el pensamiento teológico cristiano gozan de enorme tradición las llamadas *demostraciones de la existencia de Dios.* Se trata de diversas argumentaciones, a menudo presentadas en forma lógico-filosófica, cuya tesis final es la existencia de Dios pero cuya finalidad práctica es el adoctrinamiento del no creyente o la reconfirmación del creyente en su fe.

La demostración en el ámbito militar

En el mundo castrense son frecuentes las *demostraciones de fuerza,* actos que en tiempos de paz dan lugar a desfiles ante la población civil y que en tiempos de guerra dan lugar a monstruosas destrucciones de la población civil. También entienden por *demostrar* hacer cualquier acto que intimide al enemigo o a la víctima y admiten como conveniente hacer *demostraciones para despistar* al enemigo.

La demostración en el ámbito jurídico

Tanto el juzgar como el establecer los hechos o determinar lo que sucedió, descubriendo a los culpables, es tradicional en abogados, jueces, fiscales, defensores, inspectores, etc. apelar a la necesidad de *demostrar la veracidad* del modelo propuesto para explicar la sucesión de los hechos. Usan por ello una combinación curiosa de objetos reales (vídeos, cadenas, grabaciones, cadáveres, etc.) y de razonamientos lógicos que *expliquen* lo acaecido.

La demostración en el ámbito conyugal

Incluso en este ámbito tan finito, pero tan variable, de las parejas, se ha instalado la costumbre de hablar de demostraciones. En un sentido pícaro se hace referencia a las *demostraciones de amor*, como una forma de referirse a todo tipo de caricias y prácticas amatorias. En un sentido más interesado es frecuente oír la expresión que encabeza este apartado:

"Cariño, ... ¡demuéstrame que me amas!",

forma imperativa, frecuentemente relacionada con ámbitos del consumo, que a menudo da lugar a insólitas *demostraciones* en forma de pulseras, collares, pendientes, anillos, viajes, transferencias, etc. Por eso, cuando estos objetos no aparecen, se dice:

"Nunca me has demostrado tus verdaderos sentimientos",

como si la ausencia de regalos no fuera una demostración clara del estado en que dichos sentimientos se encuentran.

Vale la pena evocar aquí el epigrama de Samuel Johnson[1]:

"Las personas que se vuelven a casar
son la *demostración* de que la esperanza
pesa más que la experiencia".

Como queríamos demostrar

Es en el ámbito matemático donde la idea de demostración y el verbo demostrar adquieren, históricamente, una dimensión notabilísima. Fue precisamente la autoexigencia de razonamiento deductivo la que marcó el final de una Matemática experimental y dio paso a las Matemáticas tal como la entendemos hoy en día. Los ideales platónico-aristotélicos propios de la filosofía y de la lógica filosófica impregnaron la Matemática griega, y con ella buena parte de nuestra cultura.

En el mundo del *homo mathematicus* la demostración final es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de experimentalidad, intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. Es así como el *homo de-*

[1] Samuel Johnson (1709-1784) es un famoso lingüista y poeta satírico británico.

monstrans descubre que demostrar *en vivo* es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como su redacción final parece indicar.

Pero más allá del alumbramiento de un teorema original, es preciso constatar que los teoremas tienen una evolución a lo largo de los años. Las demostraciones parecen vivir, a lo largo del tiempo, unos curiosos cambios:

- La peor demostración suele ser la primera.
- Las demostraciones mejoran con los años.
- La demostración ideal es una esperanza latente.
- Hay demostraciones aceptables por fe en la comunidad.

En definitiva, los teoremas y sus demostraciones nunca son fríos enunciados inalterables sino los resultados de grandes ingenios humanos que evolucionan con los años. Demostrar en Matemáticas es crear.

¡SILENCIO! ¡SE DEMUESTRA!

Nuestro admirado George Pólya[2] nos da unas reflexiones docentes relevantes sobre el tema de intuición-demostración:

> "El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición.
>
> Si esto es así, y yo lo veo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de la Matemática... ¡Enseñemos intuyendo!"

Y Pólya nos anima a favorecer heurísticamente el desarrollo de los argumentos intuitivos, a detectar errores de la intuición, a aproximarnos inductivamente a los problemas:

> "Los hechos matemáticos se intuyen primero y después se prueban... hay que dar oportunidades al estudiante para hacer problemas en que primero intuya y luego pruebe...".

En el mundo de la investigación educativa, se han realizado grandes esfuerzos para estudiar científicamente el tema de las demostraciones contempladas desde un punto de vista docente y estudiantil. Grandes nombres de la Didáctica de la Matemática como N. Balacheff, T. Dreyfus, R. Duval, P. Ernest, E. Fischbein, G. Hanna, I. Kleiner, I. Lakatos, R.C. Moore, D. Tall, A. Sierpinska, V. Zack, nos permiten hoy reconocer las enormes dificultades existentes (incluso en niveles avanzados de finales de Secundaria e inicio de Universidad) para entender el tema de la demostración en toda su complejidad.

Algunas de las cuestiones que han merecido especial atención son:

[2] PÓLYA, GEORGE (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos, Madrid.

- ¿Qué diferencia hay entre justificar, argumentar, verificar o demostrar?
- ¿Qué importancia debe darse a la prueba experimental?
- ¿Qué aporta la visualización en las demostraciones?
- ¿Qué grado de rigor debe exigirse en cada nivel?
- ¿Qué debe evaluarse en el conocimiento de teoremas?
- ¿Qué es más importante que entienda el alumno en una demostración?
- ¿Qué tratamiento dan los libros y los profesores a las pruebas?
- ¿Qué tipo de estudiantes ven la necesidad de demostrar?
- ¿Qué tipo de convicción tienen los estudiantes ante las pruebas?
- ¿Qué tipo de redundancias deben ser permisibles en los estudiantes?

En general, el nivel universitario incluye demostraciones; el nivel primario prepara a iniciarlas; y en el nivel secundario no aparece este tema en muchos currículos, en muchos libros y en muchas clases. Por ejemplo, en el currículo japonés un 53% de temas están demostrados, pero en el currículo alemán sólo un 10% de temas se someten a verificación.

La NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) ha publicado en el 2000 la revisión de los influyentes *Principios y Estándares para la Matemática Escolar.* Los principios que guían la propuesta son la igualdad, la adecuación curricular, la labor docente, el aprendizaje significativo, la evaluación innovadora y el uso correcto de la tecnología. Y los estándares para cada ciclo educativo se especifican en relación a Números y Operaciones; Álgebra; Geometría; Medida; Análisis de datos y Probabilidad; Resolución de Problemas; *Razonamiento y Demostración*; Comunicación; Conexiones y Representación. Es importante pues que se equipare el apartado de Razonamiento y Demostración a otros estándares como los citados y que además se considere *la necesidad del desarrollo continuado y progresivo* de dicho estándar fijando que dicho trabajo debería permitir a los estudiantes desarrollar la siguiente cuaterna de competencias:

- Reconocer que razonar y demostrar son aspectos fundamentales de las Matemáticas.
- Formular e investigar conjeturas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones.
- Seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de demostración.

LAS SIETE VIRTUDES CAPITALES DE LAS DEMOSTRACIONES DOCENTES

Las demostraciones que merecen integrarse en la docencia deberían reunir unas determinadas virtudes que a continuación intentaremos describir.

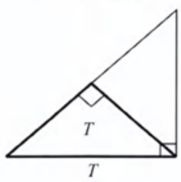
1ª virtud: la demostración debe ser ejemplar

Siguiendo una afortunada denominación del matemático inglés E.C. Zeeman, una demostración (o su correspondiente teorema) será noble cuando sea *ejemplificadora,* cuando "capture la quinta esencia de alguna *forma de hacer en Matemáticas*". El teorema a demostrar debe ser útil y/o importante y el propio método de demostración debe iluminar una forma singular, creativa, de proceder, es decir, la demostración pasa a ser un modelo de procedimiento con el que se podrán abordar otras demostraciones. Aquí vemos una muy antigua y una actual preciosa.

Teorema: $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

Demostración (Platón). Si $\sqrt{2}$ fuese racional representable en la forma $\sqrt{2} = m/n$ con m.c.d $(m,n) = 1$ resultaría $2n^2 = m^2$ y al ser m^2 par debería serlo m, es decir $m = 2K$ con K entero. Así $n^2 = 2K^2$, n^2 sería par y, por tanto, n también sería par, contradiciendo el hecho de que m y n no tenían factores comunes.

Demostración (Tom Apostol 2000). Por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Si fuese racional, $\sqrt{2} = m/n$, el triángulo rectángulo de catetos n y hipotenusa $n\sqrt{2} = m$ tendría los tres lados enteros. De todos los triángulos rectángulos con lados enteros debe haber uno T que es el más pequeño posible. Pero fijado T, se podría construir otro T' de lados enteros semejante a T y más pequeño que T, contradiciendo la definición de T.



2ª virtud: la demostración debe ser necesaria

Aquello que se trata de demostrar puede ser intuitivamente obvio o incomprensible. En este caso su demostración no merece consideración docente. Serán aquellos hechos que superan la evidencia los que más se van a beneficiar de su propia demostración. Así pues la necesidad demostrativa deberá estar relacionada con la posibilidad de *iluminar, recalcar o profundizar* en el propio hecho que se trata de justificar.

A continuación se presentan dos teoremas importantes cuyo resultado es bueno conocer, pero cuyas demostraciones pueden ahorrarse.

Teorema de Jordan. *Toda curva continua cerrada en el plano, que no se cruza a sí misma, divide el plano en una parte interior y otra exterior.*

Teorema de Círculos*Un círculo no es nunca la reunión finita de una familia de círculos contenidos en él.*

Evidente... si lo piensa 30 segundos. Pero de demostración complicada si se sienta a formalizar dicha propiedad. El siguiente enunciado necesita demostración. No es evidente en absoluto...

Teorema (R. Courant y H. Robbins). *Dadas tres rectas cualesquiera en el espacio (de forma que ningún par de ellas sean paralelas o concurrentes, no siendo las tres a la vez paralelas a un plano), existen infinitas rectas en el espacio que se apoyan en las tres dadas.*

Demostración. Dadas r_1, r_2, r_3, considere un plano cualquiera π que contenga a r_1 el cual cortará a r_2 y r_3 en dos puntos P_2, P_3. Entonces la recta determinada por P_2 y P_3 cortará a r_1 y se apoya en las tres rectas. Como π era cualquiera, habrá infinitas rectas.

3ª virtud: la demostración debe ser rigurosa

La demostración matemática totalmente completa, formalizada y rigurosa existe como *ideal* cognitivo pero, tal como reconocen P. J. Davis y R. Hersh[3], pocas veces se encuentra escrita o explicada en detalle. La omisión de cálculos rutinarios, la cita de otros resultados que no se reproducen de nuevo, la ocultación de pasos tediosos o la llamada a recursos intuitivos, analógicos, metafóricos o heurísticos convierten a menudo la publicación o explicación de un teorema en un curioso *discurso retórico* pensado más para especialistas que para estudiantes o personas no iniciadas.

Así pues, el concepto de rigor en docencia debe ser siempre relativo a la formación previa, a aquello que es posible entender. Incluso podríamos decir que hay un tipo de rigor que debe ser función del nivel educativo. Así, en una visión en espiral de la docencia (volver a pasar por los mismos conceptos pero cada vez desde más arriba), el rigor debería ir *aumentando* al ir revisitando resultados.

Cabe remarcar, además, que en la docencia matemática es posible "elegir bien" las premisas o resultados previos de los cuales partir para hacer una demostración y por tanto no necesariamente debe plantearse una "larga" cadena deductiva que exigiría un enorme rigor en muchos pasos.

Recordemos, por ejemplo, el famoso teorema de Euclides:

Teorema (Euclides). *Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.*

[3] Davis, Ph. D. y Hersh, R. (1989): *El sueño de Descartes: un mundo según las Matemáticas.* MEC-Labor. Barcelona.

Este resultado, llamado en tiempos medievales *pons asinorum* –el puente de los asnos–, indicaba el nivel de ciertos alumnos avanzados si éstos eran capaces de *demostrar* con rigor la igualdad de los ángulos (descomponer el triángulo en dos triángulos mediante la bisectriz-mediatriz desde el ángulo superior a la base, demostrar la congruencia de los dos triángulos,...) y al final llegar a la igualdad de ángulos. Si alguien considera hoy como *definición* de triángulo isósceles el que tiene dos lados iguales y sus correspondientes ángulos opuestos también iguales, entonces la necesidad del teorema anterior desaparece.

A menudo en clase podemos distinguir lo que es un *rigor redundante* de lo que es un *rigor imprescindible.* Es el segundo tipo el que merece atención especial. El siguiente ejemplo es un bonito y sorprendente resultado que exige de forma natural un rigor de procedimiento.

Teorema (J. Bronowski y D. Pedoe). *El número entero más pequeño N tal que al colocar la primera cifra al final resulta un nuevo número que es 3/2 del inicial, es:*

$$N = 1.176.470.588.235.294$$

Demostración. La escritura $N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ le permite imponer la condición $a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_n = \frac{3}{2} a_n \ldots a_0$ y usando potencias de diez establecer que

$$(3.10^n - 2)\, a_n = 17\, (10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_0)$$

La divisibilidad necesaria de $3.10^n - 2$ por 17 le lleva a que $n = 15$ y con $a_{15} = 1$ obtiene el número deseado. Es inmediato (si no usa calculadora) verificar que el número obtenido satisface la propiedad requerida.

4ª virtud: tanto la demostración como el resultado deben ser entendibles

Aquí reivindicamos el hecho de que no sólo se trata de *entender* el relato demostrativo, ir viendo los pasos y los argumentos, sino que también se trata de *entender* plenamente lo que el resultado *significa*, cuáles son sus consecuencias, qué cosas son equivalentes, qué implicaciones tendría el que no fuese cierto, etc.

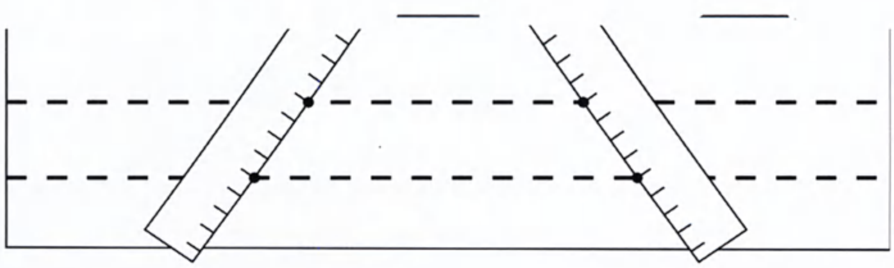
En particular, las denominadas demostraciones sin palabras, deberán ir acompañadas siempre de argumentos orales o escritos que puedan ayudar a hacer comprensible tanto el resultado como el método de demostración.

5ª virtud: la demostración debe ser elegante

El concepto de elegancia matemática de una demostración engloba tres requerimientos: que la argumentación sea (esquemáticamente) *clara* facilitando un seguimiento; que la demostración sea *minimalista* y que sea *breve.*

Problema. *Tiene un tablón de madera rectangular y no posee cinta métrica. Plantee diferentes estrategias para lograr marcar en el tablón su división en tres partes iguales rectangulares para dividir en tres el lado corto.*

Solución. Por ejemplo, con la ayuda de un papel y un lápiz puede hacer una tira de papel dividida en 12 partes y que sea más larga que el lado corto del tablón. Colocando la tira inclinadamente dos veces se podrá marcar los puntos de división correspondientes a las marcas 4ª y 8ª de la tira de papel. Esto marcará dos pares de puntos en el tablón que permitirán por el teorema de Thales dividir el tablón en tres partes iguales.



6ª virtud: la demostración debe mantener la atención, captar el interés y la participación

Esta virtud es claramente un gran objetivo docente. Ya sea porque el resultado es sorprendente o intrigante o porque el desarrollo de la demostración es ameno, disfrutable, debemos procurar que la vivencia del propio hecho demostrativo sea deleitable.

Quizás deberíamos prescindir de la escenificación ritual de presentar los teoremas con sus nombres lógicos (*Teorema, Proposición, Corolario, Escolio,...*) y romper el relato deductivo perfectamente ordenado y acabado. Podemos dar más importancia al desarrollo inductivo, a los procedimientos heurísticos, a ir estableciendo conjeturas, refutándolas o refinándolas... hasta dar con el resultado. Aquí pueden notar algo importante: *las demostraciones se pueden hacer corresponder con las resoluciones de problemas* que sean adecuados en cada etapa.

Observen la siguiente forma de incitar a demostraciones planteando un problema:

Problema (Pólya). Considerar las cuatro proposiciones siguientes (I) - (IV), que no son necesariamente verdaderas:

(I) Si un polígono inscrito en un círculo es equilátero, es también equiangular.
(II) Si un polígono inscrito en un círculo es equiangular, es también equilátero.
(III) Si un polígono circunscrito en un círculo es equilátero, es también equiangular.
(IV) Si un polígono circunscrito en un círculo es equiangular, es también equilátero.

Establecer cuáles de las cuatro proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas, dando una prueba en cada caso. ¿Qué ocurre con los cuadriláteros y los pentágonos? ¿Puede usted intuir, o quizás incluso probar, enunciados más comprensivos?

Una aproximación intuitiva inmediatamente nos alerta de que la II es falsa para un rectángulo y la III lo es para un rombo. La I y la IV son verdaderas en general (¡pruébelo!). Al reconsiderar la II y la III para pentágonos descubrimos su validez lo cual nos anima a explorar la II y la III para polígonos con un número impar de lados (¿qué ocurrirá en general?).

7ª virtud: la demostración en clase debe ser escenificada, cuidando tanto su presentación como su dinámica

Las demostraciones pueden prepararse con esmero. La existencia de buenas imágenes, modelos, esquemas, material manipulativo, etc, puede ser determinante en el momento de elegir un teorema para ser demostrado. Pero también mil detalles como planear un debate previo, cuidar la velocidad de escribir o exponer transparencias, la claridad de la voz, el uso de elementos audiovisuales, etc., pueden ser elementos determinantes del éxito docente.

Problema. *Diseñe un algoritmo para dividir un pastel entre 3 personas de forma que la repartición final sea aceptable para los tres.*

Algoritmo 1º: El 1º divide el pastel en 3 trozos que le parecen equivalentes. A continuación el 2º y el 3º, independientemente, juzgan qué parte preferiría cada uno. Entonces la parte rechazada tanto por el 2º como por el 3º se la queda el 1º. Se reúnen ahora los otros dos trozos y el 2º corta y el 3º elige.

Algoritmo 2º (J. Selfridge y J.Conway, 1960): El 1º divide el pastel en 3 trozos. A continuación el 2º puede recortar uno de estos trozos. El 3º elige... y luego el 2º y finalmente el 1º.

Y se pueden estudiar diversos algoritmos alternativos. En este tipo de problemas la demostración de la validez del método usado simplemente consiste en argumentar la razón por la cual cada participante debe contentarse con la parte recibida... y será conveniente que se visualice el pastel con un pastel de verdad.

EL GRAN TEOREMA DE SU VIDA

Y llegados a este último apartado es procedente remarcar las conclusiones de lo dicho. El tema de las demostraciones es anecdótico a nivel social, es una característica genuina de la creatividad matemática y es un reto docente. No es sólo conocer resultados sino aprender a razonar y saberlo hacer de maneras múltiples, desde la intuición a la deducción, desde la exploración heurística al razonamiento inductivo. Es algo, además, muy propio de la enseñanza de las Matemáticas y que por tanto merece una especial atención como objetivo docente.

Pero permitan que les transmita una reflexión sobre nuestra dimensión humana al tratar este tema de las demostraciones y los teoremas. No podemos reducir el tema a una cuestión aséptica, puramente profesional y técnica. También argumentando lógicamente, justificando, demostrando, presentando resultados, etc., podemos incorporar nuestro entusiasmo, nuestra pasión por el tema. No sólo es buscar la verdad. También se trata de buscar el interés y la pasión. ¿Cuál es el gran teorema de nuestra vida? El gran teorema para todos nosotros, la gente de la educación matemática *es demostrar cada día que como matemáticos, como docentes y como personas apostamos con entusiasmo por la formación matemática y personal de nuestros alumnos y alumnas.* Y esta demostración no es sencilla al incluir elementos muy diversos (conocimientos, técnicas didácticas, estados emocionales) y por ser, necesariamente, diaria. Nosotros con el teorema de nuestra propia vida deseamos, a la vez, transmitir resultados y técnicas pero también una formación personal. Deseamos decir a estos chicos y chicas que el *rigor* del pensamiento deben aplicarlo a su vida personal, que los *argumentos* deben guiar sus relaciones con los demás, que el *razonamiento* debe ser el motor del futuro social. Que el valor añadido al aprender Matemáticas es esta posibilidad de transferir a la vida cotidiana los principios básicos de esta materia.

¡Gracias por demostrar cada día su entusiasmo por las Matemáticas y su amor por la gente joven!

ALICIA, HARRY POTTER, MAFALDA Y MANOLITO GAFOTAS EN EL BALNEARIO DE LAS MATEMÁTICAS
(Un cuento para profesores de Matemáticas)

Capi Corrales Rodrigáñez

Departamento de Álgebra, Facultad de Matemáticas, UCM

UNA ELECCIÓN COMPLICADA

Alicia, Harry Potter, Mafalda y Manolito Gafotas se encontraban en una encrucijada: al año siguiente empezaban el Bachillerato, y debían elegir un camino entre varios posibles. Aquella tarde, como todas las tardes, se juntaron con el resto de la pandilla en el parque del barrio. El tema de la inminente elección dominó las conversaciones. Tras bastante discusión, Mafalda, siempre práctica, resumió muy clarito la conclusión a la que ella había llegado.

"No es tan difícil, sólo se trata de decidir qué queremos ser de mayores. Una vez tengamos eso claro, la decisión es pan comido: lo que mejor nos entrene para ser lo que queramos ser de mayores".

"¿De mayores? ¿Quieres decir de adultos? ¿Quién ha dicho que queramos ser adultos?", dijo inmediatamente Peter Pan.

"¿Ser como los adultos? ¿Como qué adultos?", le cortó Alicia, "¿como nuestros profesores?" –todos pusieron cara de horror, ¡no, como nuestros profesores ni hablar!– "¿como nuestros padres?" Mafalda miró para el cielo, Wendy y Susanita sonrieron, Harry puso expresión melancólica, pensar en sus padres muertos siempre le hacía poner expresión melancólica, y el resto empezó a discutir vivamente. "¿Como nuestras hermanas mayores?", continuó Alicia. "¿Como qué adultos? A mí me parecen todos tremendamente aburridos".

Peter Pan, Wendy y Susanita lo tenían muy claro: Peter nunca se haría mayor, Susanita iba a ser mamá y tener muchos hijitos, y Wendy tenía decidido pasarse la vida jugando a las casitas. Y para nunca ser mayor, ser mamá y tener muchos hijitos, o pasarse la vida jugando a las casitas, no les parecía que se necesitase mucho entrenamiento, así es que optarían por el camino más fácil. Pero Alicia, Harry, Mafalda y Manolito seguían confusos.

Después de pasar un montón de tardes dándole vueltas al asunto (y aburriendo a Peter, Susanita y Wendy que decidieron pasar de ellos mientras siguiesen tan pesados), el tema de la elección quedó temporalmente zanjado: Alicia quería no aburrirse; Mafalda quería curar al mundo de todas sus enfermedades, las reales y las que ella se imaginaba; Manolito quería ser directamente abuelo, tener una pensión todos los meses, sentarse en un banco del parque con los amigos y, de vez en cuando, tomarse un aperitivo; y Harry, bueno, Harry no sabía lo que quería, salvo encontrar un lugar en el que se sintiese aceptado y no le mirasen como un bicho raro.

No, ahora la elección de las clases del año siguiente ya no les preocupaba nada de nada. Ahora era otro el problema que les preocupaba ¿Era crecer tan tremendamente horroroso como a primera vista parecía? "¿Es posible ser mayor sin llevar una vida aburrida?", se preguntaba Alicia. "¿Hay algún mayor que no se limite a jugar a ser padre o madre, y que preste atención a los problemas del mundo?", pensaba Mafalda. ¿Podría él, cuando fuese adulto, vivir aquella constante aventura que, según le contaban, fue la vida de sus padres?, quería saber Harry. Y Manolito no se imaginaba otra manera de vivir su futuro que no fuese en Carabanchel y tener un camión o un bar; pero la idea de compartir con su hermano "el Imbécil" el camión de su padre o de servir cañas al Yihad *el chulito* le daba ganas de repartir collejas a diestro y siniestro, así que necesitaba encontrar otras maneras de ser adulto o acabaría cayendo en la delincuencia juvenil. Lo veía venir.

ALICIA, HARRY, MAFALDA Y MANOLITO SE VAN A CONOCER MUNDO

Tras darle muchas vueltas al tema, decidieron ampliar su conocimiento del mundo de los mayores antes de tomar ninguna decisión, y concibieron un plan: se apostarían en la esquina más concurrida del barrio frente al bar, el quiosco de periódicos y la tienda de frutos secos, litronas y chucherías, y una vez allí, elegirían entre todos los adultos que pasasen aquellos que les resultasen más atractivos y les seguirían hasta descubrir a qué se dedicaban, cómo vivían y quiénes eran sus amigos.

Así pues, un lunes por la mañana hicieron *pellas*, se sentaron en el lugar elegido y se concentraron en los que pasaban. Durante más de una hora no vieron a nadie que les llamase especialmente la atención. Pero a eso de las nueve, Alicia, que comenzaba a dormirse, susurró: "mirad a esos dos".

Una mujer y un hombre se acercaron y compraron cada uno un periódico. El hombre iba en bicicleta y tendría la edad del padre de Mafalda. La mujer, un poco mayor, que llevaba el pelo recogido en un moño sobre la cabeza y montaba en monopatín, dijo: "te echo una carrera hasta el Balneario", y ambos se lanzaron calle abajo.

"¡A por ellos!", gritó Alicia, y sin dudarlo un instante todos la siguieron. Como había mucho tráfico, no les costó esfuerzo alcanzar a la pareja y mantenerse a su altura.

"¡Es la vecina de enfrente de mis tíos!", susurró emocionado Harry.

Todos había oído hablar de aquella vecina. Harry vivía con sus tíos y primo, una gente espantosa que le odiaba. Durante las muchas horas que desde niño había pasado encerrado a solas en su habitación mirando por la ventana, Harry había descubierto que la casa de los vecinos de enfrente era un lugar especial, en el que no dejaba de entrar y salir gente a todas horas. El padre había muerto y la madre viajaba en monopatín. Con frecuencia llevaba sobre la espalda una mochila llena de papeles y Harry sospechaba que era maestra, porque a veces, en verano, cuando las ventanas estaban abiertas, la había visto escribir en la pizarra que cubría la pared del atiborrado salón donde todos parecían tener su propia esquina; las gemelas, las más pequeñas, un escenario en el que constantemente estaban subidas, disfrazadas con trozos de tela haciendo gestos o bailando; el pelirrojo, una mesa cubierta con papeles, lapiceros y pinturas. Y la mayor, una pecosa con trenzas, un pequeño laboratorio lleno de frascos y cachivaches. En el centro de la habitación había una gran mesa con un ordenador en una esquina que todos parecían compartir, y que lo mismo servía de mesa de comer que de mesa de trabajo. De hecho, siempre estaba llena de cosas, ya fueran platos o papeles. Harry nunca se había atrevido a hablarles –sus tíos se lo tenían absolutamente prohibido– pero secretamente soñaba que un día un rayo caería sobre la calle matando instantáneamente a su tío, su tía y su primo, y que él se mudaría a la casa de enfrente.

"El de la bicicleta es mi vecino Andrés", dijo Mafalda mientras corrían siguiendo a la bici y al monopatín. "Vive en el mismo bloque que yo, en la puerta de al lado, y es matemático. Un día coincidimos en el ascensor y me explicó con unas pelotas de baloncesto el movimiento de la Luna, la Tierra y el Sol durante los eclipses".

El vecino Andrés y su amiga se habían metido por un portón de hierro. Nuestros amigos les siguieron, y se encontraron en un jardín pequeño con un viejo olivo en el centro y una fuente rodeada por geranios de todos los colores en una esquina. Un montón de bicicletas, entre las que reconocieron a la del vecino Andrés, estaban aparcadas bajo el olivo. "Han debido entrar en ese edificio", dijo Manolito, señalando un caserón de ladrillo algo destartalado. Un cartel junto a la puerta de entrada decía:

Balneario de las Matemáticas. Bienvenidos

Masajes de ideas; duchas de conceptos; tertulias relajantes; lecturas excitantes; intercambios de estrategias y métodos de enseñanza.

Para profesores e investigadores de todos los niveles.

"Dice que somos bienvenidos, ¡qué bien!", exclamó Alicia, que nunca se leía la letra pequeña. Y ni corta ni perezosa empujó la puerta. Algo cortados, los demás, que sí leían la letra pequeña, la siguieron.

Una vez dentro del edificio se dieron de bruces con la vecina del monopatín, que salía en ese momento por una de las puertas que daban al recibidor.

"Vaya, vaya, ¿así es que nos habéis encontrado? Os vimos siguiéndonos hace un rato y nos preguntábamos qué habría sido de vosotros. Bueno, yo me llamo Catalina, ¿en qué puedo ayudaros? Porque supongo que si nos habéis seguido hasta aquí será por algo".

Siguiendo con lo planeado, Mafalda explicó que les habían encargado un trabajo en el Instituto y debían pasar un día con distintos adultos y enterarse de a qué se dedicaban. Catalina le interrumpió con un gesto de la mano. "Entiendo. No hace falta que inventéis excusas. Yo lo hice más de una vez de joven (de hecho, he de confesar que a veces lo sigo haciendo), y se lo he visto hacer con frecuencia a mis hijos: se dedican a estudiar a los adultos durante horas, hacen largas listas de a quien no quieren parecerse de mayores, y luego se matan de risa imitando a los elegidos. El que andéis todos detrás de mí como si yo fuese el flautista de Hamelín me pone un poco nerviosa. ¿Alguno de vosotros sabe dibujar?"

Harry se sonrojó: "A mí no se me da mal".

"Pues ven conmigo. Podrás echarme una mano y de paso ver alguna de las cosas a las que me dedico. El resto buscad a otra víctima".

HARRY POTTER APRENDE A MIRAR

Harry siguió a la vecina Catalina hasta la sala de exposiciones. Era una habitación pequeña y llena de luz, con varias sillas y mesas en el centro. Tres de las paredes estaban vacías, y la cuarta aparecía prácticamente cubierta por dos enormes láminas a color.

"Aquí nos entrenamos a mirar. A mirar las cosas del mundo como si se tratasen de problemas de Matemáticas escritos en una pizarra, y a mirar las Matemáticas como una cosa más del mundo".

Harry miró las láminas y reconoció inmediatamente una de las reproducciones: se trataba de *Las meninas* de Velázquez.

El segundo cuadro le resultó desconocido y extraño. Se acercó a él, y leyó en un cartelito a su derecha:

Las meninas: María Agustina Sarmiento 3
Pablo Picassso, 1957

"¿Las meninas?", se sorprendió Harry. Se alejó de nuevo de la pared, y miró con atención.

"Siéntate, anda. Y no me distraigas que tengo que pensar. Por cierto, yo pienso en voz alta. Espero que no te moleste", le dijo la vecina Catalina.

Harry se sentó en una de las sillas y esperó. La vecina Catalina, tras poner frente a Harry un cuaderno y unos lapiceros, empezó a dar vueltas por la habitación sin dejar de mirar las láminas y hablar.

Las meninas. Velázquez las pintó al natural, en el siglo XVII. Picasso pintó este cuadro en 1957, sólo conoció a María Agustina, la menina del búcaro, a través del cuadro de Velázquez; podría haberla copiado sin más, sí que podría haberlo hecho, talento para ello no le faltaba, no señor. Pero no fue una mera copia de María Agustina lo que pintó. Debió pintar algo que él veía cuando miraba el cuadro de Velázquez. Pero, ¿qué exactamente? ¿Qué pintó Picasso en este cuadro aparentemente tan extraño? Eso es lo que vamos a intentar descubrir mirando, mirando con los ojos de la razón, con los ojos del pensar. Con los ojos de las Matemáticas. Hablando de ojos, ¿por qué me miras así Harry? No te sorprendas, aunque nadie te lo haya contado antes, uno de los muchos regalos que nos hacen las Matemáticas es que nos quitan el miedo a los cuadros, sobre todo a los modernos. Sí, con las Matemáticas les perdemos el respeto a los cuadros, y acabamos mirándolos con la misma naturalidad con la que miramos una descripción matemática sobre una pizarra. Y eso nos permite jugar y disfrutar, que es de lo que se trata.

Miremos, pues, este cuadro Harry, y mirémosle teniendo presente que vamos a hablar sobre este cuadro en concreto, no sobre Picasso, ni su obra, ni su tiempo ni nada de nada más que este cuadro, al que observaremos con tanto cuidado como si se tratase de una posible pieza matemática, haciendo preguntas matemáticas sobre él como si se tratase de un objeto a reconstruir, del que sólo tuviésemos algunas nociones básicas y parciales: vamos a asumir que hay un objeto que existe, que está representado en este cuadro, y que este cuadro es un *atlas* en el que se combinan simultáneamente varios *mapas locales.* No sabemos qué aspecto tiene el objeto representado por el cuadro en tres dimensiones, e intentamos reconstruirlo a partir de este atlas. Los dos ingredientes claves son, pues, las representaciones locales planas de Picasso y el sistema de referencia global de Velázquez.

Veamos… se trata de la niña del búcaro. En todo análisis hay que elegir un punto de partida; comencemos pues con el búcaro, ¿por qué no? Un punto de partida tan bueno como cualquier otro. A ver Harry, ¿podrías copiar el búcaro y la bandeja del cuadro de Picasso?"

Harry se puso afanosamente a dibujar. La vecina Catalina se le acercó y miró el boceto de Harry.

"¿No te emociona el enorme talento de Picasso, Harry? Un par de líneas oscuras es todo lo que necesita para describir el búcaro que reposa sobre la bandeja. Tan sólo unas líneas oscuras. Un momento, hablando de líneas oscuras… ¿no resultan un poco extrañas estas de la bandeja? Aparecen delante del búcaro, no detrás. A ver, Harry, imagínate que eres Picasso, que estás en *El Prado* frente a *Las meninas* mirando la escena descrita por Velázquez, y dibujas mentalmente la bandeja. ¿Dónde colocarías las líneas negras que delimitan su contorno interior? Detrás del búcaro, por supuesto, no delante. Así pues las líneas que pintó Picasso no están dibujadas según las veía el espectador Picasso mirando el cuadro de Velázquez, sino según las veía otra persona; pero, ¿quién las ve así? Veamos, veamos de nuevo la escena según nos la cuenta Velázquez, Harry, el único entre nosotros que estuvo allí. Recorre con la imaginación los lugares en los que están colocados los personajes en la escena y sobre el cuaderno vete dibujando la bandeja vista desde cada uno de ellos".

Harry estaba un poco perdido, pero obedeció y se puso a dibujar. Cuando acabó, la vecina Catalina comparó los dibujos de Harry con el de Picasso.

"¡Ajá! es la propia María Agustina la que ve así la bandeja. ¿Estaremos ante María Agustina vista por María Agustina?". Levantó la cabeza y volvió a comparar ambos cuadros con atención. "Absurda suposición", añadió a los pocos segundos, "la bandeja está descrita tal y como la ve María Agustina, pero nadie ve sus propios ojos, que además está claro que no casan el uno con el otro, luego ni están vistos por María Agustina, ni están vistos ambos desde el mismo lugar. Tomemos una nueva hipótesis de trabajo: Picasso abandona el punto fijo, se mueve físicamente alrededor de la figura de María Agustina, elige unos cuantos lugares desde donde nos da descripciones locales de la doncella y luego las casa todas en una única descripción global. Bueno, no parece, en principio, una hipótesis disparatada. Al fin y al cabo, de ser correcta, se trataría de una versión siglo XX del mismo juego que practica Velázquez: moverse de sus ojos a los de los reyes y los espectadores, y de éstos, a través del espejo, a los del visitante que aparece por la puerta del fondo de la escena. En el cuadro de Velázquez algunos objetos y figuras están vistos desde un lugar, otros desde otros. En el cuadro de Picasso parece que una misma figura está vista desde varios lugares simultáneamente. Comprobémoslo, intentando averiguar cuáles son estos lugares en los que se detiene Picasso para dibujar a María Agustina. Miremos de nuevo el cuadro, Harry. Las claves que buscamos están en la bandeja sobre la que aparece el búcaro, la mano que sostiene la bandeja, el pelo y el rostro y, finalmente, en los ojos y la nariz. Ya tenemos la bandeja, pasemos, pues, a la mano. ¿Podrías copiar para mí la mano que aparece en el cuadro de Picasso, Harry?... ¡Claro! Al verte dibujarla me doy cuenta de un detalle que hasta ahora había pasado por alto: en la mano aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma. Esa es la clave que buscamos. ¿Quién está situado en la posición adecuada para poder ver esas almohadillas? Miremos de nuevo, con ojos reflexivos, la escena de Velázquez. Sólo el propio Velázquez, a la izquierda de María Agustina, podría percibirlas. Esto marcha. Pasemos ahora a la cabeza de Sarmiento".

Esta vez Harry no esperó a que la vecina Catalina se lo pidiera para empezar a dibujar. Ella se dio cuenta y le sonrió. Harry se ruborizó de placer y siguió dibujando con esmero. La vecina Catalina retomó el hilo de sus pensamientos.

"El pelo enmarca perfectamente el rostro, y el contorno de ambos aparece completo, como sólo puede verlos la infanta, a la que María Agustina mira de frente. La propia María Agustina, Velázquez, la infanta. Picasso se va poniendo en el lugar donde está situado cada uno de ellos y, entrenado en el proceso de la abstracción, selecciona alguna característica de la figura elegida que describir desde ese lugar. María Agustina Sarmiento nos describe la bandeja sobre la que reposa el búcaro; Velázquez, la mano que sostiene la bandeja; la infanta, el marco del rostro de María Agustina".

Un hormigueo nervioso se fue apoderando de Harry. Tuvo la sensación de que se estaban acercando a algo. Respiró hondo, intentó no pensar en nada que no fuese lo que estaba viendo y, siguiendo una indicación casi imperceptible de la vecina Catalina, se puso a dibujar el ojo izquierdo.

"Fíjate, Harry, hay tres claves esenciales en este ojo: el trazo horizontal de la izquierda, la acumulación de grises a la derecha y el lugar donde está dibujada la pupila. Estas claves indican que el ojo está descrito desde el perfil derecho, esto es, desde el lugar que ocupan los reyes y los espectadores en el cuadro de Velázquez. El mismo lugar, observo, desde donde está visto el búcaro. Tiene sentido, los padres se preocupan. ¿Se dará su niña a esas veleidades de la *bucarofagia*[1]?".

Harry tomó nota mental de enterarse de qué era aquello de la *bucarofagia.* Sonaba interesante... La vecina Catalina seguía hablando. "Picasso ya nos ha descrito la figura que componen doncella y búcaro desde arriba, desde la derecha, desde la izquierda y desde delante. ¿Le habrá logrado dar toda la vuelta? No puedo contenerme más. Estoy francamente nerviosa. Necesito dar un paseo y relajarme".

Y cogiendo su monopatín, que había dejado contra una pared, salió de la habitación. Harry se asomó a la puerta a tiempo para verla desaparecer a toda velocidad tras una esquina del pasillo, no sin antes casi atropellar a un par de tipos que, enfrascados en una discusión, pasaron a su lado sin verla siquiera. Bastante confuso pero muy excitado, Harry no paraba de darle vueltas a la misma idea en la cabeza. Si fuese cierto lo que sospechaba la vecina Catalina, ¡si Picasso llegase a dar *toda* la vuelta a María Agustina...! Por otro lado... ¿describir una figura desde los cuatro costados sobre un papel...? Imposible, concluyó incrédulo. La figura se disolvería. A los pocos minutos, con los ojos brillantes, las mejillas encendidas y bastante despeinada, la vecina Catalina regresó.

"¿Qué te ocurre Harry? Pareces preocupado".

Harry le contó lo que había estado pensando.

"Yo no estoy tan segura como tú de que la figura se disolvería. Dos razones me llevan a confiar en que Picasso lo haya conseguido: que en Matemáticas se puede hacer y el enorme talento de Picasso. Le he visto ya hacer demasiadas cosas difíciles como para dudar de su capacidad. Venga, hombrecillo de poca fe, volvamos ante María Agustina. Abre el cuaderno y repasemos los dibujos que llevamos hechos. Sí, nos falta por analizar un ojo en el cuadro de Picasso, el de la derecha".

Harry lo dibujó, y al hacerlo comprendió que estaba mirado desde el mismo lugar desde el que estaba mirada la nariz. Ambos se volvieron a estudiar la escena de Velázquez.

"¿Desde dónde está visto este perfil?" se preguntó en voz alta la vecina Catalina. "Desde la izquierda de Sarmiento. Es, pues, un ojo descrito como lo ven el visitante que aparece por la puerta del fondo y los reyes a través del espejo. María Agustina vista desde detrás. ¡El cuarto costado que nos faltaba! Como la veían Velázquez, la infanta, los reyes, el visitante; como se veía ella misma. Una persona vista desde delante, desde detrás, desde su izquierda, desde su derecha, e incluso desde sus propios ojos. Encolando todas esas visiones parciales y locales, Picasso nos ofrece una visión global completa, interroga a todos los testigos que estaban allí".

La vecina Catalina se colocó frente al cuadro de Velázquez, moviéndose de un personaje a otro. "Me gusta su peinado", comenta la infanta, en plena edad del pavo. Velázquez, pintor, se fija en las manos. "Buen pulso sosteniendo la bandeja", concluye. "Tenía tanto miedo de que se me cayese el búcaro", confiesa María Agustina. "El búcaro, el búcaro... eso es lo que me preocupa a mí", interviene la reina. "Pendiente de la niña sí parece que esté", opina el rey. Y el visitante suspira, mientras comenta, "¡un magnífico perfil!".

[1] Palabra derivada del latin *búcaro* (arcilla, y por extensión, los jarros fabricados con ella). En época de Velázquez estaba de moda en la Corte la *bucarofagia*, masticar arcilla, práctica con la que se lograba una palidez extrema en la piel.

En ese momento sonó un timbre. La vecina Catalina pegó un respingo. "¡Cielos, son casi las doce! He de irme a dar clase. Gracias, Harry, ha sido todo un placer mirar contigo. Tienes buen pulso y buen ojo. Deberías dedicarte al *quidditch*[2]. Pásate por casa cuando quieras. No, mejor, vente esta tarde a merendar. Y trae a tus amigos, si quieres".

"Gracias", contestó Harry, que no cabía en sí de alegría. Había contribuido a hacer un descubrimiento. Eso sí que era mágico. Y encima le habían invitado a merendar a la casa más divertida del barrio. No podía esperar a contarle a sus amigos todo lo que le había pasado. Dobló las hojas con los dibujos, se las metió en la mochila y salió a buscarles.

ALICIA SE ALÍA CON LA LÓGICA

Mientras Harry estaba con la vecina Catalina, Mafalda y Alicia se dedicaron a estudiar el amplio zaguán que servía a la vez, por lo que pudieron deducir, de recibidor y sala de reuniones. La pared de la derecha estaba prácticamente cubierta con percheros llenos de abrigos y sombreros y un montón de casilleros para la correspondencia.

"¡Oh, Alicia! ¿Crees que podremos probarnos los sombreros?", exclamó Mafalda. Pero Alicia no la escuchaba. Tenía la atención puesta en un grupo de personas que, sentados alrededor de varias mesas, escuchaban entre carcajadas las explicaciones de un mozalbete que llenaba de dibujos los espacios que quedaban libres en la enorme pizarra que hacía las veces de pared a su izquierda. Si había algo que Alicia no podía resistir eran las risas. Se acercó discretamente hacia el rincón del fondo donde, entre una máquina de hacer café y una tetera eléctrica, descubrió varias cajas de galletas *chiquilín.* Si había algo, además de las risas, que Alicia no podía resistir, eran las galletas *chiquilín.*

"Coge una, están ahí para ser comidas. ¿No lees lo que dice la tapa? ¡Cómeme! Por cierto, ¿quién eres tú? ¿No resultas un poco chica para estar aquí?". Alicia se volvió, descubriendo un par de tipos regordetes y perfectamente idénticos que la miraban llenos de curiosidad. Ambos estaban parados bajo una estantería, con el brazo por encima del cuello del otro, y Alicia pudo percatarse inmediatamente de cuál era quién, porque uno de ellos llevaba bordado sobre el cuello *rí* y el otro *rá.*

"Supongo que ambos llevarán bordado *Tara* por la parte de atrás", se dijo Alicia. Estaban ahí tan quietecitos que Alicia se olvidó de que estuviesen vivos y ya iba a darles la vuelta para ver si llevaban las letras *Tara* bordadas por la parte de atrás del cuello, cuando se sobresaltó al oír una voz que provenía del marcado *rí.*

"Si crees que somos unas figuras de cera", dijo, "deberías de pagar la entrada, ya lo sabes. Las figuras de cera no están ahí por nada. ¡De ninguna manera!"

"¡Por el contrario!", intervino el marcado *rá.* "¡Si crees que estamos vivos, deberías hablarnos!"

"¿Me podríais indicar, por favor, hacia dónde tengo que ir desde aquí?"

[2] El juego de escobas voladoras practicado en Hoggarts, colegio donde estudia magia el famoso personaje de la literatura y del cine Harry Potter.

“Eso depende de a donde quieras llegar”, contestó Tararí.

“A mí no me importa demasiado a dónde…”, empezó a explicar Alicia.

“En ese caso, da igual hacia dónde vayas”, interrumpió Tarará.

“…siempre que llegue a alguna parte”, terminó Alicia a modo de explicación.

“¡Oh! Siempre llegarás a alguna parte”, dijo Tararí, “si caminas lo bastante”.

A Alicia le pareció que esto era innegable, de forma que intentó preguntarles algo más: “¿Qué clase de gente vive por estos parajes?”

“Por ahí”, contestó Tararí, señalando hacia su derecha, “viven unos”; “y por allá”, continuó Tarará, “viven otros. Visita a quienes te plazca: todos están igual de locos”.

“Pero es que a mí no me gusta estar entre locos…”, fue todo lo que pudo decir Alicia, pues los gemelos la asieron cada uno por un brazo y, prácticamente en volandas, la subieron por la enorme escalera de caracol que había al fondo de la habitación. Al llegar al último peldaño ambos soltaron los brazos de Alicia y se la quedaron contemplando: se produjo una pausa, que interrumpió la llegada de una señora vestida con una chaqueta verde exactamente igual que la de Peter Pan.

“Libremente os elijo para que seáis representantes libremente elegidos. Tú”, dijo señalando a Alicia, “representarás a los profesores, y vosotros”, y miró a los gemelos, “a los alumnos. Yo me pido jefa. Seguidme”.

Y sin añadir una palabra más se metió por la puerta entreabierta de una habitación cercana, se colocó tras un estrado en el que se podía leer *Señora Jefa*, y les señaló tres pupitres.

“Este Ministerio ha decidido simplificar la complicada situación actual estableciendo una única regla. La regla es: clase mañana y ayer… pero nunca *hoy*”.

“Alguna vez tendrá que tocar clase *hoy*”, objetó Alicia, tomándose muy en serio su papel de representante del profesorado.

“No, no puede ser”, refutó la señora de la chaquetilla verde. “Ha de ser clase un día sí y otro no; y *hoy* nunca puede ser *otro día*, ¿no es cierto?”.

“No comprendo nada”, susurró Alicia a los gemelos. “¡Qué lío me estoy haciendo con todo esto!”.

“Eso es lo que pasa cuando se vive sin lógica”, le explicó Tararí amablemente, pues en su papel de alumno se consideraba con experiencia en el vivir sin lógica, “al principio se marea siempre uno un poco”.

“¡Por el contrario!”, intervino Tarará, “es la lógica la que…”

“¡No se habla en clase!”, les interrumpió la señora de la chaquetilla verde, y asomándose al pasillo exclamó: “¡Que les corten la cabeza!”

“¡Rápido! ¡No perdáis la cabeza!”, les dijo Alicia, y los escondió bajo la tapa de su pupitre.

“¿Han perdido sus cabezas?”, preguntó la señora de la chaquetilla verde volviendo a ocupar su lugar tras el estrado.

"Sus cabezas se han perdido", respondió Alicia.

"Sigue exponiéndome tus ideas sobre el tema", le dijo con una sonrisa de aliento la señora de la chaquetilla verde.

"¡Si todavía no he dicho *nada*", replicó Alicia con tono ofendido, "de forma que no podría decir más!"

"Querrás decir que no podrías decir *menos*, siempre es más fácil decir *más* que *nada*. En cualquier caso, debieras decir lo que piensas".

"Pero si es lo que estoy haciendo", se apresuró a replicar Alicia. "Al menos..., al menos pienso lo que digo..., que después de todo viene a ser la misma cosa, ¿no?"

"¿La misma cosa? ¡De ninguna manera!", negó enfáticamente la señora de la chaquetilla verde. "¡Hala! Si fuera así, también daría igual decir *aprueban cuanto sugiero* que *sugieren cuanto apruebo*".

"¡Noticias frescas, noticias frescas!" Un cartero irrumpió en la habitación agitando un telegrama. La señora de la chaquetilla verde se lo arrebató de las manos y empezó a leerlo.

"Por fin, según el cable, la semana pasada la tortuga llegó a la meta", informó a Alicia, y siguió leyendo en voz alta. "En rueda de prensa declaró modestamente que siempre temió perder, pues su contrincante le pisó todo el tiempo los talones". En efecto, una diezmillonésima de segundo después, como una flecha y maldiciendo a Zenón de Elea, llegó Aquiles. "He de llevar la noticia al equipo del ascensor. ¡Llevan *siglos* esperándola!", terminó. Y sin tan siquiera despedirse, abrió la puerta y desapareció tras ella.

Alicia aprovechó para sacar a los gemelos del pupitre y salir corriendo con ellos hasta el final del pasillo, donde un grupo de personas medían un hueco enorme con forma de gruta, excavado en la propia pared.

"El equipo de sistemas dinámicos", informó Tararí. "Llevan años tomando medidas para construir un ascensor. Un trabajo que requiere gran concentración y paciencia".

"¿Tan difícil es tomar medidas?", preguntó Alicia.

"No se trata de tomar medidas sino de tomar medidas exactamente *precisas*", le aclaró Tarará. "Hay que medir y volver a medir, utilizando cada vez una unidad de medida menor. Una tarea que hasta hoy muchos consideraban como interminable. Pero si la tortuga ha llegado hoy a la meta..., bueno, es posible que mañana sea posible medir las paredes de la gruta y construir, por fin, el ascensor. Pero eso, de ser, será mañana; hoy, como ayer, habrá que saltar". Y cogiendo con una mano a su hermano y con otra a Alicia, se tiró por el hueco abierto ante ellos, tan inopinadamente que Alicia no tuvo tiempo ni para pensar en detenerle y se encontró cayendo vertiginosamente por lo que parecía un pozo muy profundo. De golpe y porrazo, y tras largo rato cayendo, cayendo y cayendo, cayó con gran estrépito sobre un montón de palos y hojas secas. Alicia no sintió ningún daño y se puso en pie de un brinco. Los gemelos parecían haberse esfumado. Miró hacia arriba, pero no se podía ver nada en esa oscuridad; delante de ella se abría otro largo pasillo al final del cual alcanzó a ver el vestíbulo de entrada, y corriendo se dirigió a él.

¡MAFALDA SE INTERESA POR EL MATRIMONIO!

Mientras, Mafalda había entablado conversación con el vecino Andrés que, al verla probarse un enorme sombrero, se había sentido en la obligación de hacerle saber que le sentaba fatal. "Pareces una seta, Mafaldita. Llévate ese sombrero de paja de ahí. Sienta divinamente, es mucho más fresco para el verano y mucho más ligero para viajar. Yo que tú no lo dudaba. Por cierto, hablando de viajes, he quedado en la biblioteca con un amigo mío que viaja mucho y es francamente gracioso. ¿Quieres conocerle? Anda preocupado con cuestiones matrimoniales y quiere que yo le eche una mano".

"¿Matrimonios? ¡Menudo aburrimiento!", pensó Mafalda, "¡un *Susanito*!". Y, disimulando un suspiro, siguió al vecino Andrés hasta la biblioteca.

En una esquina había unas cuantas mesas y sillas y algunos sillones de orejas estratégicamente colocados junto a lámparas de pie. El vecino Andrés se sentó en uno de ellos y recorrió con la mirada los pasillos entre los estantes atestados de libros que llenaban el lado opuesto de la habitación. Su amigo no había llegado aún. Mafalda se sentó, bueno, casi se hundió, en un enorme sillón junto al del vecino Andrés, a quien pareció hacer mucha gracia ver aquella gran mata de pelo con lazo desaparecer tras un respaldo. Se inclinó sobre el brazo de su butaca: "vaya, ten cuidado no te vayan a confundir con un cojín y se te sienten encima. ¿Tú sabes por qué se casa la gente? Eso es lo que le preocupa a mi amigo Claude. Claude es francés, y lleva años viajando por todo el mundo y estudiando las costumbres de todo tipo de gentes. Ahora le ha dado por entender por qué se casan y no se casan unos australianos, y me ha mandado una carta llena de datos, flechas y diagramas que me ha costado más de una semana entender. Pero creo que he dado con la clave: un grupo, eso es, una estructura de grupo. Se casan o no se casan según las leyes de una estructura de grupo"[3].

Mafalda abrió mucho los ojos y los oídos. Viajar por el mundo, conocer gentes, estudiar sus costumbres… Aunque hablase de matrimonios, este tipo no parecía ser un *Susanito* cualquiera. "Mira, allí llega Claude. ¡Claude, estoy aquí!".

Un hombre de pelo blanco y aspecto elegante –a Mafalda le recordó a los actores de cine de las películas en blanco y negro que tanto gustaban a su padre– se acercó a ellos y abrazó al vecino Andrés que, tras presentarles, sugirió que los tres fuesen a una habitación cercana con pizarra. Una vez allí, Mafalda y el señor Claude se sentaron en unas sillas, y el vecino Andrés empezó a inmediatamente garabatear sobre el tablero –al menos eso le pareció a Mafalda– sin dejar de hablar a toda velocidad.

"Hay dos aspectos claves en la cuestión, Claude:

Primero, los individuos de estas sociedades que estás estudiando, hombres y mujeres, están repartidos en cuatro clases, A, B, C y D, y la clase a la que pertenece cada individuo está determinada por una regla fija", y escribió en la pizarra:

[3] Los protagonistas de esta parte del cuento, Claude y Andrés, evocan a Claude Lévy Strauss (1908-1990), antropólogo que realizó estudios sobre la estructura familiar en América del Sur, y a André Weil (1906-1998), algebrista francés que modelizó matemáticamente dichas estructuras (ver Bibliografía).

Clase de la Madre	A	B	C	D
Clase de la Criatura	B	C	D	A

"Segundo, en tu sociedad hay también cuatro tipos de matrimonios posibles que son los siguientes:

Hombre	**Mujer**	**Matrimonio**
A	B	M1
B	C	M2
C	D	M3
D	A	M4

Estas dos condiciones nos dicen que, por un lado, a cada individuo se le permite elegir pareja en un único tipo de matrimonio, y por otro, el único tipo de matrimonio que puede contraer un individuo depende exclusivamente de su sexo y del tipo de matrimonio en el que nació. Traducido al lenguaje de las Matemáticas, el tipo único de matrimonio que puede contraer una mujer depende de, *es una función f de*, el tipo de matrimonio de sus padres; y el tipo de matrimonio que puede contraer un hombre es *una función g* del tipo de matrimonio del que es fruto. Con este lenguaje, la tabla de matrimonios posibles en esta sociedad es la siguiente", continuó hablando Claude, cada vez más entusiasmado, mientras escribía en la pizarra:

$$
\begin{array}{ll}
f(\mathrm{M1}) = \mathrm{M2} & f(\mathrm{M2}) = \mathrm{M3} \\
f(\mathrm{M3}) = \mathrm{M4} & f(\mathrm{M4}) = \mathrm{M1} \\
g(\mathrm{M1}) = \mathrm{M3} & g(\mathrm{M2}) = \mathrm{M4} \\
g(\mathrm{M3}) = \mathrm{M1} & g(\mathrm{M4}) = \mathrm{M2}
\end{array}
$$

"Al mirar esta tabla nos damos cuenta de que todos los tipos de matrimonios aparecen en todas las generaciones, ninguno se pierde. En el lenguaje matemático esto se expresa diciendo que las funciones f y g son *permutaciones* –reordenamientos– de M1, M2, M3 y M4. Para hallar los matrimonios posibles a lo largo de una cadena de generaciones, no tenemos más que ir haciendo actuar sucesivamente las permutaciones f y g. Las permutaciones, en general, y las de cuatro elementos, en particular, están completamente clasificadas en Matemáticas, y esto nos permite, según las condiciones extra que verifiquen nuestras reglas de matrimonio, entenderlas e identificarlas. Por ejemplo, supongamos que en tu sociedad se exige que todo hombre pueda casarse con la hija del hermano de su madre; si reflexionamos un poco sobre ello caemos en la cuenta de que esta exigencia traduce al lenguaje de las permutaciones en la condición adicional:

$f(g(\mathrm{M1})) = g(f(\mathrm{M1}))$	$f(g(\mathrm{M2})) = g(f(\mathrm{M2}))$
$f(g(\mathrm{M3})) = g(f(\mathrm{M3}))$	$f(g(\mathrm{M4})) = g(f(\mathrm{M4}))$

Sólo hay dos tipos de permutaciones de cuatro elementos que verifiquen todas estas condiciones, lo que te permitirá clasificar con gran facilidad ante qué tipo de sociedad te encuentras. Este caso concreto ilustra la manera en que las reglas matrimoniales de los tipos que estás estudiando pueden ser descritas mediante cálculos algebraicos, y cómo el álgebra puede facilitar el estudio y clasificación de fenómenos de la vida cotidiana. Lo que te llevo diciendo desde que te conozco". Y muy ufano, el vecino Andrés soltó la tiza y se cruzó de brazos, mirando a su amigo con una sonrisa de satisfacción.

Hacía rato que Mafalda había dejado de entender, y de hecho empezaba a sentirse algo mareada. Al ver que el señor Claude –que hasta el momento había estado escuchando a su amigo con mucha atención y sin decir nada– se levantaba y se acercaba a la pizarra, decidió escabullirse y volver al vestíbulo a ver si sus amigos andaban por allí. Ya tenía bastante; se sentía completamente abrumada por todas aquellas letras incomprensibles que llenaban la pizarra, pero tenía una cosa muy clara: no había entendido nada, pero tampoco se había aburrido. El problema no estaba pues en el tema del matrimonio, sino en la cabeza de Susanita.

Mafalda, Alicia y Harry se encontraron en el vestíbulo y empezaron a hablar todos a la vez.

"Un momento, ¿alguien sabe dónde está Manolito?", dijo Mafalda.

"Sí, en el jardín", señaló Harry.

MANOLITO GAFOTAS SE ASEGURA EL FUTURO

Efectivamente, a través de una de las ventanas vieron a Manolito charlando junto a la fuente con una mujer joven y un hombre mayor con pajarita, y salieron a buscarle.

"Estos son Ada y Carlos[4]", les recibió Manolito. "Carlos ha construido una máquina estupenda, un ordenador superguay con el que Ada ha hecho unos cálculos de genio genial y se van a hacer supermillonarios apostando en las carreras de caballos. Les he convencido para que nos lleven con ellos".

Y así fue como Alicia, Harry, Mafalda y Manolito terminaron jugándose todo el dinero que llevaban encima siguiendo las instrucciones de Carlos y Ada. No ganaron mucho, pero sí lo suficiente como para poder comprar un helado de limón y chocolate esa tarde, cuando fueron a merendar a casa de Catalina.

[4] Estos nombres nos sugieren los de Ada Byron (1815-1853) y Charles Babbage (1792-1871), precursores de nuestros actuales ordenadores y de los lenguajes de programación.

Alicia sigue entretenidísima con la lógica, y se ha convertido en la estrella del equipo de debate de su clase. Harry pasa los sábados por la mañana pintando y estudiando la geometría de los cuadros en el museo de la ciudad, donde ha hecho muchos amigos y se siente como Pedro por su casa. Mafalda está aprendiendo, con ayuda de Andrés, a describir en un lenguaje preciso algunas de las enfermedades del mundo. Y Manolito gana todas las apuestas que hace a Susana *bragas-sucias* y Yihad *el chulito* cuando ven las carreras de coches y bicis por la tele. No sabemos todavía qué acabarán siendo nuestros amigos de mayores, ni si alguno de ellos se dedicará a las Matemáticas. Sólo sabemos que a todos ellos ha dejado de horrorizarles el parecerse a sus profesores. Al menos a los de Matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Barrie, J. M. (1913): *Peter Pan and Wendy.* New York, Charles Scribner's Sons.

[2] Carroll, L. (1865): *Alicia en el País de las Maravillas*. Madrid, 1970, Alianza.

[3] Carroll, L. (1871): *Alicia a través del espejo*. Madrid, 1970, Alianza.

[4] Corrales Rodrigáñez, C. (2001): *Paseo por el siglo XX de la mano de Fermat y Picasso.* Madrid. Ediciones Consejo Social de la UCM.

[5] Lindo, E. (1994): *Manolito Gafotas*. Madrid, Alfaguara.

[6] Quino (1992): *Todo Mafalda*. Barcelona, Lumen.

[7] Rowling, J. K. (2001): *Harry Potter y la piedra filosofal*. Barcelona, Salamandra.

[8] Rowling, J. K. (2001): *Harry Potter y el prisionero de Azkaban*. Barcelona, Salamandra.

[9] Tedeschini-Lalli, Laura (2001): "Locale/globale: guardare Picasso con sguardo riemanniano", en Emmer, Michele (ed.): *Matematica e Cultura 2001*. Italia, Springer, pp. 223-237.

[10] Weil, A. (1980): "Sur l'étude algébrique de certain types de lois de mariage" (Sobre el estudio de ciertos tipos de reglas de matrimonios), en *Œuvres Scientifiques/Collected Papers*. Berlin, Springer-Verlag.

LA DIMENSIÓN EMOCIONAL EN EL CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS

Inés Mª Gómez-Chacón

Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas (IEPS)

En los últimos años, el interés por la educación afectiva ha sido destacado en distintos foros. Se están ensayando algunos programas para ayudar a los alumnos a mejorar la conciencia de los propios sentimientos, el control de las emociones, la utilización creadora de los afectos, la ampliación de la empatía y la mejora de las relaciones sociales. Un buen resumen lo encontrarán en el libro de Daniel Goleman *Inteligencia emocional.*

Conceptos complejos, como *educación emocional* o *alfabetización emocional*, no pueden describirse en una definición breve. Es un marco amplio lo que permite su conceptualización (Gómez-Chacón, 2000)[1]. No obstante, y con la intención de tener un punto de referencia, nos atreveremos a resumir *la alfabetización emocional* en los siguientes términos:

> *proceso educativo, continuo y permanente, que pretende potenciar el desarrollo emocional a la vez que el desarrollo cognitivo, como elementos claves en el desarrollo integral de la persona.*

Para ello se propone el desarrollo de conocimientos y habilidades sobre los afectos (emociones, actitudes, creencias etc.) con objeto de capacitar al individuo para afrontar mejor los retos que plantean en la vida cotidiana. Todo ello tiene como finalidad aumentar el bienestar personal y social[2].

Tras el título de esta conferencia, *La dimensión emocional en el currículo de Matemáticas*, podríamos describir y desarrollar muchos aspectos, pero voy a destacar uno de ellos: las creencias que tienen los estudiantes y profesores sobre las Matemáticas. Para ello me voy a centrar en qué imagen de la Matemática ofrece la escuela y la sociedad, como uno de los principales orígenes en la formación de las creencias y cómo el profesorado puede mejorar esta imagen.

---

[1] GÓMEZ-CHACÓN, I. M. (2000): *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid. Narcea.

[2] En estos últimos años, desde la teoría de las inteligencias múltiples (GARDNER, H. (1995): *Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica*. Barcelona. Paidós) y desde la inteligencia emocional (GOLEMAN, D. (1996): *Inteligencia emocional.* Barcelona. Kairós), se ha puesto de manifiesto la necesidad de considerar el desarrollo de la inteligencia interpersonal y la intrapersonal como reto educativo y de prestar especial atención a las múltiples influencias que las emociones tienen en el proceso educativo.

LA IMAGEN DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA

Una de las mayores preocupaciones que tenemos como profesores de Matemáticas es la de favorecer en nuestros estudiantes el desarrollo de una sólida comprensión de los conceptos en esta área. Deseamos ayudarles a llegar a ser buenos resolutores que confían en sus propias habilidades para hacer Matemáticas. Pero nos encontramos que no es una tarea fácil y nos preguntamos continuamente ¿qué hacer? y ¿cómo hacer?, ya que detectamos algunas fuerzas aparentemente *invisibles* que parecen que deshacen todo el esfuerzo que hacemos por mejorar la educación matemática de nuestros alumnos. Los estudios sobre las creencias del profesor y del estudiante revelan que existe un conjunto de creencias o de *mitos*[3] acerca de la Matemática que pueden ser contraproductivos o ser obstáculo para lograr las metas anteriormente expresadas.

En esta conferencia queremos poner de manifiesto cómo las concepciones o filosofías de las Matemáticas que se han extendido en las aulas, muchas de ellas asociadas a los valores del profesorado o al valor atribuido a la Matemática, juegan un papel muy importante en la concepción de la imagen que los alumnos se forman de esta área. Comenzaremos con algunos ejemplos de situaciones de aula: los procedimientos de resolución de problemas en clase y el caso de un estudiante, centrándonos en el concepto que tiene sobre *hacer Matemáticas* y sus ideas sobre la enseñanza de esta disciplina. Pasaremos después a expresar la imagen acerca de la Matemática que puede ayudar a los estudiantes. Al presentar los casos trataremos de describir cómo el profesor puede mejorar las apreciaciones del estudiante a través de algunas estrategias.

LA IMPORTANCIA DE LAS PRÁCTICAS ESCOLARES

Utilizamos el concepto *creencia* conforme a trabajos anteriores.

Consideramos las creencias como esa parte del conocimiento, perteneciente al dominio cognitivo, compuesta por elementos afectivos, evaluativos y sociales. Son estructuras cognitivas que permiten al individuo organizar y filtrar las informaciones recibidas, y que van construyendo su noción de realidad y su visión del mundo. Las creencias constituyen un esquema conceptual que filtra las nuevas informaciones sobre la base de las procesadas anteriormente, cumpliendo la función de organizar la identidad social del individuo y permitiéndole realizar anticipaciones y juicios acerca de la realidad. Las creencias proporcionan significado personal y ayudan al individuo a atribuirle cierta relevancia como miembro de un grupo social. Las características del contexto social tienen una influencia fuerte sobre las creencias, puesto que muchas se adquieren a través de un proceso de transmisión cultural. En su origen y formación detectamos una relación dinámica entre las informaciones almacenadas y la realidad (siempre nueva), los sentimientos y afectos relativos a cada experiencia y a las situaciones vividas, etc.

[3] Utilizamos la palabra *mito* en el sentido que la gente lo cree sin examinar su evidencia.

Las creencias del estudiante en el ámbito de la educación matemática se categorizan en términos del objeto de creencia:

- Creencias acerca de la Matemática (el objeto).
- Creencias acerca de uno mismo.
- Creencias acerca de la enseñanza de la Matemática.
- Creencias acerca del contexto en el cual la educación matemática acontece (contexto social).

Analizando los procedimientos de resolución de problemas de los estudiantes podemos explicitar algunas de las creencias que subyacen.

Por ejemplo, ante el problema *Espejo*, Beatriz responde:

"No puedo contestar porque el problema no da ningún resultado".

Espejo

¿Qué dimensiones debe tener un espejo para que puedas verte de cuerpo entero?

La estudiante considera que este enunciado es impreciso, sus referentes habituales son que en los enunciados de los problemas te tienen que dar datos para poder resolverlos. Es decir, manifiesta la creencia tipo de que *un problema es un conjunto de datos.*

Otras de las creencias que hemos encontrado entre los estudiantes es que un enunciado *demanda siempre una solución*, y que "las destrezas que utilizo para resolver problemas en clase de Matemáticas no tienen nada que ver con las que uso para resolver problemas en la vida cotidiana", "la solución del problema es lo más importante, lo que realmente cuenta, el resto no importa".

Uno de los orígenes y formación de estas creencias y actitudes sobre las Matemáticas y la actividad matemática lo situamos en las prácticas escolares, en el modo de presentación de esta materia en el aula. Por ejemplo, un problema como el siguiente contribuye a la formación de creencias en el estudiante:

Un tren está formado por 96 vagones y transporta en cada vagón el mismo número de viajeros. Se desenganchan 12 vagones y los viajeros pasan a los vagones restantes. De este modo, cada vagón ha pasado a tener una persona más. ¿Cuántas personas iban al principio en cada vagón?

(*Aritmos. Matemáticas, Secundaria 1*, Ed. SM, Madrid, 1996)

La mayoría de los alumnos responden a preguntas absurdas en Matemáticas sin inmutarse. Muchas veces la escuela convierte a los alumnos en puros autómatas. Este problema, procedente de un libro de texto, es indicador de este hecho: ¿qué tren hay con 96 vagones...?, ¿qué papel juega la pertinencia del enunciado? Los modelos de instrucción y el material didáctico tienen una fuerte influencia en la configuración de actitudes y creencias.

Entre los rasgos característicos sobre la visión que los alumnos tienen de las Matemáticas encontramos que son:

- Fijas, inmutables.
- Desconectadas de la realidad.
- Misterio asequible a pocos.
- Colección de reglas y de cosas que hay que recordar.
- Materia en que los puntos de vista y las opiniones no tienen ningún valor.
- Materia llena de x, de y y de fórmulas incomprensibles.

Las ideas que los estudiantes tienen acerca de sí mismos con respecto a las Matemáticas moldean sus comportamientos en el estudio de esta disciplina. En otros trabajos hemos puesto de manifiesto cómo algunas de las creencias mostradas acerca de las Matemáticas provienen del tipo de instrucción que reciben en el aula. Así, por ejemplo, el tipo de problemas usados en la clase, la forma de evaluación, las dinámicas de grupo y las tareas contribuyen directamente a que el estudiante desarrolle unas determinadas creencias que pueden dar lugar a patrones de falso o de verdadero aprendizaje. El alumno desarrolla ideas de cómo trabajar problemas matemáticos mediante procedimientos que abstraen de su propia experiencia. Uno de los trabajos más delicados del profesorado es el de guiar el alumnado, partiendo de sus errores y concepciones deficientes, hacia un conocimiento que pueda ser validado como matemático.

Las creencias crean resultados; si son positivas, actúan sobre nuestras capacidades aumentándolas; si son limitativas, por lo general giran alrededor del "no puedo...". Pero en muchos casos, es posible cambiarlas y desarrollarlas. Cambiar las creencias permite variar la conducta y ésta se modifica más rápidamente si se dispone de las capacidades o estrategias para realizar una tarea. Sin embargo, cambiar la conducta no implica cambiar las creencias de forma tan fiable, pues algunas personas no se convencen nunca mediante la repetición de experiencias, simplemente ven una serie de coincidencias desconectadas.

Desde este punto de vista, consideramos importante utilizar en las clases de Matemáticas una determinada instrucción, para una mejor comprensión por parte del profesorado de cómo, quienes resuelven los problemas, los perciben y cómo seleccionan los procedimientos que se van a seguir. Su exploración nos podría dar pistas de los factores que facilitan o dificultan el aprendizaje.

Veamos ahora un caso más detallado de un estudiante; en él se pondrán de manifiesto las creencias sobre lo que es para el alumno la Matemática y su aprendizaje.

HACER MATEMÁTICAS: EL CASO DE VÍCTOR

Tomamos el caso de Víctor, un estudiante de tercero de Secundaria, para ilustrar algunas de las perspectivas sobre lo que para él significa hacer Matemáticas. Aunque Víctor será el centro de esta sección, introduciremos otros estudiantes para completar la descripción.

En clase se les propuso el siguiente problema, que se trabajó en una sesión a lo largo de cuarenta minutos[4]:

El cajón de botellas de leche

Se dispone de un cajón para transportar botellas de leche. El cajón tiene forma cuadrada y puede contener hasta 36 botellas. ¿Se podrían colocar 14 botellas, de forma que en cada fila y en cada columna quede un número par de botellas?

Elegimos este problema porque el alumno precisaba de conocimientos matemáticos elementales. Sin embargo, la profesora consideraba que podría comprometer el pensamiento de los estudiantes en lo que se considera necesario cuando el resolutor se enfrenta a un problema y sobre los modos de proceder en el quehacer matemático. Concretamente, en la fase de familiarización con el problema, en la que es importante realizar algunos preparativos técnicos para el ataque central. Éstos pueden consistir en utilizar una representación, un dibujo, y señalar en él la información que se da y las consecuencias más simples que se pueden sacar, procediendo de forma sistemática en la *estrategia* de ensayo y error.

Consideramos que las *habilidades* y las *destrezas* que podían favorecer este problema eran las siguientes:

- Búsqueda sistemática de posibilidades: analizar la situación, orden en la búsqueda, recontar de manera exhaustiva.
- Manejo de modelos matemáticos que respondan a la situación que queremos resolver.
- Analogía entre situaciones: búsqueda y reconocimiento.

En el modelaje realizado en el aula se pudieron *formular preguntas* que ayudaron al avance en la resolución como:

- ¿Qué puedo introducir que ayude en el comienzo? Uso de representación.
- ¿Puedo cambiar mi perspectiva del problema? Dirigir la atención para encontrar nuevas formas de ver el problema.

Y se trabajaron *procedimientos* como: realizar tanteos, extraer la información, introducir una representación, una forma sistemática de registrar.

Principalmente con este problema lo que se pretendía era trabajar la modificación de distintas creencias sobre lo que es para el estudiante la Matemática y su aprendizaje. Por ejemplo, este problema tiene distintas soluciones, por lo que puede posibilitar que el estudiante rompa con la *creencia* que los problemas de Matemáticas tienen solución única; o que *hacer Matemáticas* es trabajar con cuentas y con fórmulas.

La acogida de la actividad en el grupo clase fue positiva; se involucraron rápidamente en la tarea y uno de los alumnos, Acharaf, dibujó un rectángulo 5 x 4 pero sin representar ninguna botella, comenzando a dar soluciones en voz alta. Al preguntar la profesora cómo lo hace, respondió que mentalmente (no manifiesta ninguna forma de manipular el problema). Detectamos que la comprensión del enunciado no era correcta.

[4] Sesión de clase correspondiente al día 16-3-95.

Los demás estudiantes del grupo dibujaron el cajón, probando diferentes posibilidades, pero no de forma sistemática. La profesora intervino para orientar e indicar que se fijasen en el cajón, en el número de botellas. Realizaron varios intentos pero se les olvidaban las condiciones del problema: que en cada fila y en cada columna quede un número par de botellas. Identificaron la expresión *que quede un número par de botellas con que quede el mismo número par en las filas y en las columnas*. Intentaron el problema de forma animada y constante, no manifestando rechazo cuando en los primeros intentos no les salía. No obstante, de forma continua se les tuvo que remitir a los datos del enunciado.

Por ejemplo, el estudiante Víctor había representado un cajón de 10 x 3 = 30 cuadraditos, olvidando que era cuadrada la caja y que necesitaba 36 espacios. Varias veces, Víctor y Andrea creyeron haber encontrado una solución, pero no comprobaron si era correcta, olvidando tener en cuenta las condiciones del problema. Víctor pidió ayuda a la profesora para la comprensión del enunciado.

Después de intentarlo durante doce minutos, se les repartió una guía con pistas que le pueden ayudar en el proceso de resolución (ver Cuadro 1). Al realizar la lectura de la guía, Andrea protesta al leer la pista *intenta con cajones rectangulares*, exclamando "¿entonces para qué te dicen que es un cuadrado?". La profesora trató de explicarle que probablemente le sería más fácil con cajones rectangulares, dado que si el de forma cuadrada le resultaba más difícil lo transformara a un caso más sencillo, que era lo que había hecho su compañero Acharaf. Se les animó a los dos a que trabajaran juntos, invitándoles a que cambiaran su perspectiva del problema, dirigiendo su atención hacia nuevas formas de ver el problema.

Cuadro 1. *Guía para la resolución del problema*

Pistas para la resolución del problema *El cajón de botellas de leche*

Cómo comenzar

- Lee despacio, enterándote qué es lo que tienes que averiguar. Fíjate en los datos que te dan.
- Para comenzar dibuja el cajón. Encuentra alguna forma de manipular, de tocar el problema. Como no tienes botellas de leche, utiliza otra cosa en su lugar.
- Pon ejemplo de cajones de otros tamaños.
- Pregúntate ¿cuántas botellas podría haber en cada fila y cada columna?

Ya que estás metido en el problema

- Intenta ahora con cajones más grandes.
- Al final tienes que volver a lo que te dice el problema que son cajones de 36 botellas, pero ¿qué pasará con los cajones cuadrados, en general?

Ya que he resuelto el problema, veo si el problema se puede ampliar

- Intento colocar otro número de botellas.
- Inténtalo con cajones rectangulares.
- Pasa a un problema más sencillo como el siguiente:

Se dispone de un cajón para transportar botellas de leche. El cajón tiene forma rectangular y puede contener hasta 24 botellas. ¿Se podría colocar 18 botellas, de forma que en cada fila y en cada columna quede un número par de botellas? ¿Existe una única forma de hacerlo?

Acharaf continuó haciéndose preguntas sobre el problema tratando de comprender. Mientras tanto, Víctor protesta y grita de forma agresiva que el problema le *come la cabeza* -no era capaz de cambiar su perspectiva-. La reacción emocional de Víctor pareció no condicionar a los demás estudiantes del grupo y continuaron trabajando. Intentan varias veces y no les sale, es ahora Acharaf el que protesta. Irrumpe en este preciso momento Víctor, creyendo que ha encontrado una solución. Acharaf se queda callado y continúa en el empeño de resolución. Sara anima al grupo expresando "que el problema es fácil aunque ellos se estén comiendo la cabeza", provocando la curiosidad y manteniendo la perseverancia en la resolución.

Tras un nuevo intento Víctor logró la solución, manifestando a la profesora su disposición favorable a comunicar el proceso seguido y a reflexionar sobre sus reacciones. Sin embargo, posteriormente describió muy poco del proceso experimentado, comentando: "...al principio me come la cabeza... después curiosidad, yo me he dedicado a poner x como un loco y ha salido... lo importante es que lo he hecho".

Víctor comunicó su solución a Sara y trabajaron juntos para que esta última encontrara la suya. La profesora invitó a Andrea y a Víctor a que, siguiendo la guía, realizaran una extensión y ampliación del problema. Víctor manifestó resistencia cuando se le indicó si podía encontrar una regla para los cajones cuadrados en general. Andrea continuó trabajando en nuevas soluciones. Después que terminaron la resolución, se les facilitó una hoja donde tenían que indicar qué actividades matemáticas habían realizado (ver Cuadro 2). Con ello pretendíamos favorecer la metarreflexión y tratar de modificar la creencia *que hacer Matemáticas es trabajar con cuentas y con fórmulas*. Por ejemplo, Acharaf en una de las entrevistas nos decía "prefiero cuentas que no hay que pensar".

Cuadro 2. *El trabajo matemático*

Y ahora que has terminado...

Ahora que has acabado tu problema, toma esta hoja. Da un repaso al proceso que has seguido, con ella al lado, y contesta a lo que se te pregunta.

Aquí tienes un cuadro que recoge actividades de Matemáticas. Indica con una x si has realizado la actividad matemática que se indica.

Actividades matemáticas	
Representar con un dibujo, esquema, diagrama, tabla, gráfica, ecuación,...	
Ordenar, reagrupar, clasificar los datos	
Deducir	
Suponer ideas y comprobarlas	
Aplicar una fórmula, calcular	
Trabajar sobre casos más sencillos	
Distinguir diferentes posibilidades	
Utilizar procedimientos de la vida cotidiana	
Utilizar problemas parecidos que ya conocías	
Pensar sobre la respuesta y reconstruir el proceso	
Comprobar, criticar, juzgar, dar por válido	
Reflexionar sobre tus reacciones	

En este episodio pudimos observar que para muchos estudiantes, *obtener una respuesta es el objetivo de las preguntas de Matemáticas en la escuela*, ya que es donde, con frecuencia, se ha situado el énfasis en el aprendizaje. Hacer alguna cosa para intentar conseguir una respuesta y luego comprobar con el profesor su validez, parecía caracterizar la aproximación de estos estudiantes de lo que significaba hacer Matemáticas. La insistencia de la profesora era evitar *que ella fuera la fuente de autoridad en relación a la justificación* y hacerlos responsables de la decisión sobre la validez de su método o solución aunque esto fuera una causa para la frustración, la resistencia, particularmente en el caso de Víctor.

LA CREENCIA EN EL TIPO DE METODOLOGÍA A UTILIZAR

Como situación tercera, presentamos el caso de un profesor que parte de la creencia de que habitualmente las propuestas de aprendizaje cooperativo tienen la finalidad de reducir la ansiedad y potenciar la autorregulación de los alumnos. Este profesor tiene la firme convicción de que la interacción entre pares mejora la competencia personal de los alumnos en la resolución de problemas, ya que les obliga a enfrentar enfoques cognitivos cuando entran en conflicto las diferentes perspectivas a la hora de abordar el problema. Por tanto, plantea en el aula, a un grupo de cuatro alumnos de primero de Secundaria, el siguiente problema:

El diseño del *puzzle*

A mi compañera y a mí nos han encargado el diseño de un puzzle; ella se comprometió a realizar el 22,22...% de las piezas y yo el 16,66...%. Lo hemos hecho de forma que el número total de piezas no llega a 40, aunque sobrepasa las 30. Razona las siguientes cuestiones; puedes invertir o ir alternando el orden según lo consideres más conveniente.

- ¿De cuántas piezas se compone el puzzle que hemos diseñado?
- ¿Qué es lo que sabes?
- ¿Qué es lo que crees?

Este escenario ilustra una fuente continua de frustración para el profesorado. Cuando el profesor propone el problema, parte de que los cuatro estudiantes tienen una habilidad media en Matemáticas para trabajar en equipo. Además, piensa que disponen de conocimientos suficientes para resolver el problema o por lo menos para comenzar. Sin embargo, lo que se pone de manifiesto es que los alumnos creen que no pueden hacerlo. Están convencidos de que los porcentajes son muy difíciles y, como consecuencia, ni lo intentan. Estos estudiantes muestran falta de confianza en sí mismos para afrontar este tipo de problemas. La falta de confianza puede estar justificada, por ejemplo, porque no comprendan muy bien el concepto de porcentaje. No obstante, lo que se pone de manifiesto es cómo esto actúa en su estructura de creencia y en la formación de actitudes hacia la Matemática.

Hemos señalado algunas imágenes que tienen los estudiantes y que proceden del ámbito escolar. Con estos ejemplos se ha querido poner de manifiesto que para entender el desarrollo de los procesos de aprendizaje matemático, es preciso conocer las estructuras representacionales cognoscitivas y axiológicas de los estudiantes. No solamente las representaciones individuales específicas, sino también secuencias de representaciones genéricas, socialmente ancladas y culturalmente condicionadas.

IMAGEN SOCIAL DE LA MATEMÁTICA

Consideramos que las Matemáticas son también un objeto social y, por este hecho, revestido él mismo de un aspecto imaginario.

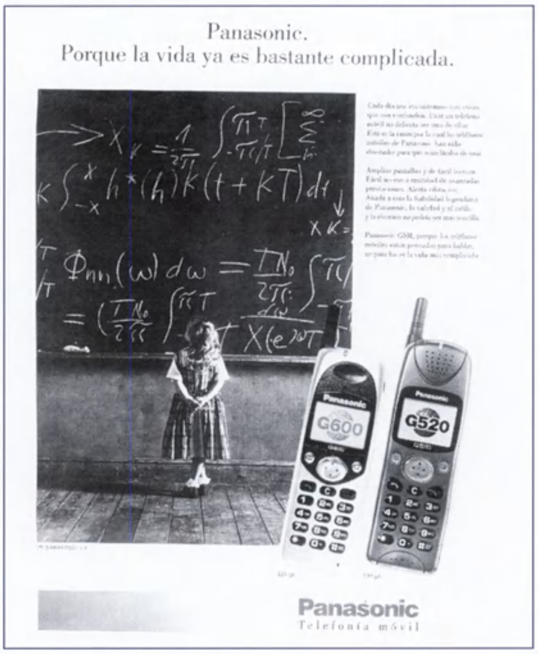
Es importante ser críticos y detectar este aspecto colectivo del *imaginario* o representación social de las Matemáticas en los medios de comunicación, en los matemáticos, en la institución escolar y en los estudiantes.

Se entiende por *imaginario* lo que es dependiente de la imagen. Se puede decir que toda relación con el objeto (en nuestro caso las Matemáticas) es imaginaria. No operamos con el objeto sino con la imagen que formamos a partir de él. La imagen del objeto es nuestra, tanto la mera imagen perceptual como la derivada del recuerdo. Metafóricamente se habla del *imaginario de las Matemáticas* cuando algo o alguien pasa a formar parte de los *ideales* de uno o de muchos. Los *imaginarios sociales* serían precisamente aquellas representaciones colectivas que rigen los sistemas de identificación y de integración social y que hacen visible la invisibilidad social. Lo que aquí nos interesa es la incidencia en el presente, en el ámbito escolar, como forma de configurar, de diversos modos y a distintos niveles, las imágenes y creencias que tienen estudiantes y profesores sobre la Matemática.

Los medios de comunicación social son un reflejo y una expresión del pensamiento social. Por tanto, podemos aproximarnos a través de ellos a la imagen social de las Matemáticas. Lo que nos sorprende a primera vista es la estabilidad de esta imagen desde hace muchos años, trátese tanto de periódicos como de películas, etc., la imagen presentada suele ser coincidente. Algunas de las imágenes que encontramos son:

- En nuestra sociedad a la Matemática se le mira con gran respeto: aparece como una *asignatura hueso*, como una materia para *cabezas inteligentes*. El anuncio del Cuadro 3 es expresión visible de ello.

Cuadro 3. *Anuncio*



- Sólo es necesario aprender aritmética para desenvolverte bien como ciudadano.
- La sociedad reconoce que la Matemática es esencial en muchos aspectos de la vida económica e industrial.
- La Matemática es una materia árida basada en el razonamiento, desprovista de toda fantasía y creatividad.
- La Matemática es una actividad de razonamiento perfecto y, por tanto, sinónima de verdad y seguridad.
- La Matemática es un mundo de hombres.
- La Matemática es el *ogro* de los planes de estudio.

Esto es sólo una pequeña muestra de lo que podemos encontrar en los periódicos[5]. La Matemática se percibe de forma distorsionada en nuestra sociedad. Se ha creado una imagen por lo menos tendente a resaltar sólo unos determinados aspectos de esta materia. Mucha gente piensa que es una colección de reglas y de cosas que hay que recordar, de números que hay que manipular. Esto es una pequeña parte de lo que es la Matemática.

¿QUÉ IMAGEN ACERCA DE LA MATEMÁTICA PUEDE AYUDAR A LOS ESTUDIANTES?

Podemos constatar que las Matemáticas presenta múltiples rostros. Nosotros vamos a presentar cuatro caras que consideramos relevantes para favorecer una imagen adecuada en los estudiantes y que un profesor de Matemáticas puede comunicar en su enseñanza. La primera y cuarta representan caras más familiares, mientras que a las otras dos se les suele prestar una escasa atención.

1. La Matemática como cálculo, como razonamiento formal y como resolución de problemas.
2. La Matemática como una forma de conocimiento.
3. La Matemática como medio para la creatividad.
4. La Matemática como aplicación.

1. La Matemática como cálculo, como razonamiento formal y como resolución de problemas

Este es el rostro más familiar de las Matemáticas para la mayoría de la gente. En las instituciones educativas quizás es al que se presta mayor atención. No obstante su familiaridad, no hemos querido dejarlo de lado en este trabajo, sino al contrario, nos ha animado a

[5] Para la persona interesada en estudiar y ver otras ejemplificaciones del tema en la literatura, en el cine, etc., se puede consultar (Gómez-Chacón, 2000) y GÓMEZ-CHACÓN, I. M. (2001): “Imaginari social de les matemàtiques”, en *Revistes pedagògiques Guix*, nº 276-277, pp. 65-73. Barcelona.

adentrarnos en aspectos que consideramos no han sido logrados en la enseñanza de esta disciplina, de forma particular en el razonamiento formal.

Epistemológicamente, el razonamiento es el fundamento de las Matemáticas. Según las corrientes filosóficas, la interpretación de esta afirmación ha sido muy diferente (Cañón, 1993[6]). Por ejemplo, las epistemologías formalistas conceden gran importancia al método axiomático-deductivo. Los axiomas son las fórmulas que cimientan el edificio matemático. Se presta mucha atención a los procesos de demostración, concebida ésta como una sucesión infinita de fórmulas, que bien son axiomas o teoremas. Una formula será demostrable si se puede construir una demostración de la que ella es el último paso. Para otras epistemologías, como las falibilistas, la fase creativa en Matemáticas no está regida por los análisis lógicos, sino por una indagación que ha de arriesgar nuevas visiones, relacionar conceptos o propiedades y crear nuevos.

En la actualidad, matemáticos como Miguel de Guzmán, afirman:

“Podríamos decir que inicialmente la Matemática es una exploración de la complejidad de ciertas estructuras de la realidad... Pero, naturalmente, esto se podría afirmar también de cualquier otra ciencia. El quehacer matemático se distingue por la forma peculiar como se acerca a sus propios objetos. La Matemática trata de obtener su dominio sobre ellos a través de:

a) Una simbolización adecuada.

b) Una manipulación racional rigurosa de ellos, donde rigurosa quiere decir que compele al asenso.

c) Con la finalidad de adquirir un dominio efectivo de la realidad en cuestión”[7].

Esta visión de la Matemática permite una definición más amplia de lo que involucra el razonamiento matemático. En estos últimos años, gracias al gran cúmulo de herramientas conceptuales nuevas, en torno fundamentalmente al análisis matemático, y gracias también a la herramienta que supone el ordenador, ha surgido la posibilidad de iniciar, a través de la teoría de los sistemas dinámicos, la exploración de los fenómenos de la naturaleza que no son lineales, como el caos matemático. Muchas de estas herramientas se han logrado por métodos de innovación matemática más próximos a la intuición que a la inferencia formal. Esto significa que se está poniendo fuertemente de relieve que el razonamiento matemático conlleva el razonamiento heurístico, el razonamiento inductivo y el visual. El desarrollo de la probabilidad y de la estadística ha encontrado modos de manejar aquellas situaciones en las que las causas que en ellas influyen son tantas y tan complejas que la mente matematizante ha de renunciar a examinar el influjo aislado de cada una para explorar de otro modo la influencia de todas ellas.

En los últimos estudios internacionales sobre Matemática se destaca que los profesores ponen más acento en la enseñanza a los estudiantes, en cómo hacer Matemáticas, que en cómo comprender las Matemáticas. Se continúa poniendo más el énfasis en cálculos

[6] Cañón, C. (1993): *La Matemática creación y descubrimiento.* Universidad Pontificia de Comillas.

[7] Guzmán, M. (1993): *El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura.* Discurso Inaugural 1993-1994 de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

algorítmicos y rutinas que en procesos de pensamiento. En algunos casos existe bastante desconocimiento de cómo operan determinados procesos. No obstante, consideramos que se ha producido un avance en la descripción de los mismos, sobre todo en los de resolución de problemas y hay indicadores sobre cómo los estudiantes mejoran en sus procesos de pensamiento a través de la reflexión (o *metacognición*) y la práctica, y no lo hacen a través de estrategias pasivas (memorización, rutinas, etc.). En otros trabajos hemos tratado de dar respuesta a esta cuestión y a otras que derivan de ella como: ¿existen tipos de razonamiento matemático que se pueden enseñar de forma explícita?, ¿de qué modos?, ¿qué tipos de razonamiento matemático se pueden desarrollar a través de la práctica y la reflexión en Secundaria?

2. La Matemática como una forma de conocimiento

Las Matemáticas son clave en las culturas que pretenden progresar en la educación. En la *Declaración de Río de Janeiro del 92* en el segundo objetivo se señala: "Las Matemáticas puras y aplicadas son una de las claves más importante para la comprensión del mundo y de su desarrollo... Los países deberán ser capaces de alcanzar un nivel que lo haga posible". Esto implica un gran esfuerzo adicional en los campos de la educación y de la formación. Asimismo, en la modificación de la imagen social de la Matemática.

La Matemática como actividad humana es una forma particular de conocimiento, que implica una forma de comprensión de los diferentes aspectos del mundo en el que vivimos.

Se han producido cambios bastante profundos en el campo de las ideas acerca de lo que es el verdadero *quehacer matemático*. Como forma de conocimiento tiene sus características específicas. Nos podríamos preguntar: ¿qué es exactamente el tipo de conocimiento que denominamos Matemáticas? Mucha gente piensa que es una colección de reglas y de cosas que hay que recordar, de números que hay que manipular. Esto es una pequeña parte de lo que es la Matemática. Sin ánimo de ser simplista, podríamos decir que la Matemática trata con problemas abiertos, que requieren tiempo, perseverancia, y flexibilidad de pensamiento. Participa de muchos de los aspectos de juego, pero no es solamente juego, sino también una ciencia, un arte intelectual creador de una belleza peculiar, uno de los *ejes fundamentales de la cultura*, con un lugar muy central en ella y una responsabilidad muy especial en su correcto desarrollo (Guzmán, 1993, 1995[8]). Las Matemáticas tienen que ver con la representación y la generalización y con contenidos propios, y no sólo con la solución de problemas concretos o prácticos. Su proceso de enseñanza favorece la formación en valores como:

- La racionalidad.
- La creatividad.
- El rigor.
- El progreso.

[8] Ver GUZMÁN, M. (1993) y GUZMÁN, M. (1995): "Impactos de la Matemática sobre la Cultura" en *La Ciencia ante el siglo XXI*. Ciclo de conferencias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid. Fundación Ramón Areces. pp. 21-54.

- La flexibilidad y la apertura.
- El espíritu crítico.
- El espíritu lúdico.

La Matemática también es definida como la *ciencia de los modelos*. Trata de explorar las estructuras de la realidad que son accesibles mediante la percepción, sometiéndolas a una elaboración racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones. La mirada a los diferentes aspectos de la realidad ha dado lugar a las diversas ramas de la Matemática, que son expresión de distintos de modelos. Por ejemplo:

- *La Aritmética y la Teoría de Números*, que surgen del intento de dominar la multiplicidad presente en la realidad, estudian los modelos numéricos y de cálculo y recuento.
- *La Geometría* estudia los modelos de la forma y la extensión.
- *El Análisis* pone en nuestras manos los modelos que exploran las estructuras de cambio y de las transformaciones de las cosas en el tiempo y en el espacio.
- *La Lógica* estudia los modelos de razonamiento.
- *La Teoría de la Probabilidad* trata con los modelos de azar.
- *La Topología* estudia los modelos de proximidad y posición.

Podríamos seguir enumerando los diversos modelos subyacentes, pero no es objeto de esta conferencia. Ha sido reseñado para poner de manifiesto que la educación matemática es una de las pocas oportunidades de que disponen las personas para experimentar y practicar las Matemáticas explícitas, y con frecuencia no se les volverá a presentar semejante oportunidad en su vida, donde las Matemáticas implícitas -las Matemáticas insertas en nuestra vida social- revisten tanta importancia. De acuerdo con Christine Keitel[9] en que:

> "Las Matemáticas devienen implícitas e *invisibles*; la matematización creciente de nuestra sociedad se ve complementada por una desmatematización de sus integrantes".

Por tanto, sigue siendo imprescindible, en cualquier conceptualización de la Matemática escolar, poder definir una visión de la Matemática subrayando sus pontenciales formativos y de capacitación de los sujetos, y una ampliación y fortalecimiento del contenido matemático de sus actores.

En los estudios sobre actitudes hacia las Matemáticas y creencias que hemos realizado, o que otros investigadores han realizado, se ha puesto de manifiesto que los valores de la cultura matemática que los estudiantes vivencian, son aprendidos de forma implícita e incluso no consciente (Gómez-Chacón, 2000, 2001)[10]. En muchos casos, los

[9] KEITEL, C. (1997): "Matemáticas y realidad en la clase" en *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, 12, pp. 49-66.

[10] GÓMEZ-CHACÓN, I. M. (2002): "Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional" en CARRILLO, J. (ed.): *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas*. Publicaciones Universidad de Huelva, pp. 199-227

valores que se asocian a las Matemáticas no son nada beneficiosos para la formación matemática y personal del alumno. Por ejemplo, basta considerar las opiniones acerca de la naturaleza de las Matemáticas arraigadas en el público en general. Aunque esto forma parte de la imagen social de la Matemática, lo que también está cada vez más claro es que la Matemática, además de ser una clase determinada de tecnología simbólica (reglas, conceptos, algoritmos etc.), también como tipo de conocimiento es portadora, y al mismo tiempo producto, de unos valores determinados. Si sólo pretendemos comprender las Matemáticas como una tecnología simbólica concreta, únicamente comprenderemos una pequeña parte de ella; de hecho, quizás la menos importante para la educación y para nuestro futuro.

3. La Matemática como medio para la creatividad

Uno de los aspectos alentadores en la sociedad moderna es el reconocimiento creciente de la imaginación como fuerza vital y esencial. La imaginación es la fuerza creadora del individuo, que libera posibilidades de conocimiento y creatividad. La Matemática es un medio idóneo para cultivar esta creatividad.

Algunos signos claves que pueden favorecer el potencial creativo en Matemática son:

- *Curiosidad:* es un área donde se formulan preguntas de manera persistente y deliberada. Se experimenta con palabras, objetos, ideas, símbolos, tratando siempre de extraer de ellos significados nuevos.
- *Flexibilidad:* si un método no da resultados, se puede pensar inmediatamente en otro.
- *Sensibilidad ante los problemas:* es una actividad propicia para favorecer que los estudiantes visualicen con rapidez las lagunas en la información, las excepciones a las reglas y las contradicciones en lo que oyen o leen.
- *Redefinición:* la actividad matemática proporciona a los estudiantes un entrenamiento específico para ver significados ocultos en manifestaciones que los demás dan por sentado, descubrir nuevos usos para objetos familiares y visualizar conexiones nuevas entre objetos que parecen no guardar ninguna relación entre sí.
- *Capacidad de percepción:* usualmente, al trabajar en la resolución de problemas se accede con facilidad a esferas de la mente menos usuales y se juega con ideas que emergen espontáneamente.
- *Originalidad:* es un área propicia para trabajar los redescubrimientos espontáneos y valorar las ideas pocos comunes y sorprendentes.

El pensamiento creativo implica un proceso de resolución de problemas. Pero, a la vez, exige que el sujeto utilice sus propios conocimientos y experiencias para elaborar una respuesta que satisfaga una profunda necesidad de autoexpresión.

Las rutinas en Matemáticas tienen su valor. No debemos condenarlas tan fácilmente considerándolas aburridas. Las rutinas nos pueden conferir la libertad de hacer otras cosas. Por ejemplo, la rutina de las cadenas de producción permite a los empleados hablar de otros temas. El trabajo creativo realizado en cualquier campo exige que el individuo ejerza control sobre el material y las ideas con que trabaja. Si al estudiante se le lanza rápidamente a través de una serie de ejercicios, y luego se le asigna otra serie que guarda escasa relación con la primera, disminuirán las probabilidades de que tenga oportunidad de desarrollar el tipo de control que necesita para emprender una acción creativa.

Por último, reseñar que una aptitud necesaria para resolver los problemas creativamente es la de generar y manejar la incertidumbre. La incertidumbre, o la toma de conciencia de cursos alternativos de pensamiento o acción, resulta útil tanto antes como después de tomar una decisión.

4. La Matemática como aplicación

Hoy es posible describir en lenguaje matemático el mundo de lo inanimado y del ser vivo. Las más antiguas aplicaciones de las Matemáticas están en las ciencias de la naturaleza, especialmente en la Física. Sin embargo, gracias a los ordenadores, a las técnicas de Análisis Numérico y al uso de la Estadística, hoy es posible el diseño y aplicación de modelos matemáticos para abordar problemas complejos, como los que se presentan en la Biología, en la Medicina y en las Ciencias Sociales (Sociología, Economía,...), a las que dota de métodos cuantitativos indiscutibles.

Las Matemáticas resultan hoy indispensables en todas las ingenierías y en las tecnologías más avanzadas, como las necesarias en los vuelos espaciales. Algunos problemas de la ciencia de la vida en las que están presentes, son las más importantes técnicas de diagnóstico médico (simulaciones y modelización de intervenciones quirúrgicas -córnea, hígado, flujo sanguíneo- etc.). Deseamos poner de manifiesto cómo en cualquier rama del conocimiento humano que desee alcanzar un alto grado de precisión en sus predicciones, las Matemáticas extienden su utilidad y su presencia.

Las Matemáticas se perciben no sólo *como la ciencia que proporciona conceptos, modelos y teorías formales*, sino también como *un lenguaje universal* con una gramática unívoca para la descripción de relaciones científicas, y su uso generalizado las ha convertido en la fuerza impulsora de casi todos los desarrollos científicos y tecnológicos; además, los modelos matemáticos confirman predicciones y prescripciones más allá de las Ciencias Naturales de la vida cotidiana y en ámbitos tales como la Economía y las Ciencias Sociales. Manejar números, actuar con un sentido numérico razonable y ser capaz de interpretar datos y sus visualizaciones creadas en tablas, gráficas o diagramas, son en la actualidad las capacidades, que se señalan, más necesarias en una sociedad que puede tildarse de totalmente matematizada.

PARA CONCLUIR

En esta conferencia hemos tratado de poner de manifiesto el origen de algunos de los sistemas mentales constituidos de conocimientos espontáneos, actitudes, emociones, creencias y valores compartidos, que los estudiantes emplean para entender, orientarse, comunicar y actuar sobre el mundo matemático, en relación a este objeto social que es la Matemática.

Una tarea necesaria para el educador es analizar cómo los modelos de instrucción y el material didáctico tienen una fuerte influencia en la configuración de actitudes y creencias. Los recursos didácticos forman, junto al mecanismo de comunicación, el núcleo a través de los cuales se ponen en contacto el agente de enseñanza y los agentes de aprendizaje. Son, por tanto, elementos a los cuales las dos partes intervenientes en la acción didáctica asignan valores y funciones específicas no siempre coincidentes. Instrumentos para el análisis de estos aspectos los podemos encontrar en las referencias y citas a lo largo de la conferencia.

Para terminar, reseñar que los profesores necesitamos ser conscientes de las imágenes que tienen los estudiantes sobre las Matemáticas y su aprendizaje, por los efectos o repercusiones que tienen en sus actitudes hacia las Matemáticas. Gran parte de la *imagen sobre la Matemática* que los estudiantes tienen se desarrolla como resultado de su experiencia social, a través de la escuela, de los padres, de sus iguales, de la influencia de los medios de comunicación. Hay maneras de actuar, de pensar y de sentir, que presentan la notable propiedad de que existen fuera de las conciencias individuales. Estos tipos de conducta o de pensamiento no sólo son exteriores al individuo, sino que están dotados de una potencia imperativa y coercitiva en virtud de la cual se imponen a aquél, quiéralo o no.

RAZONES Y RAZONAMIENTOS

Martin Kindt
Instituto Freudenthal, Utrecht (Holanda)

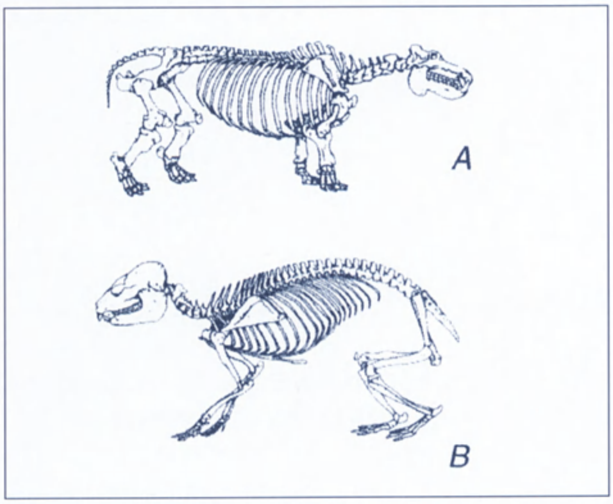
INTRODUCCIÓN

He aquí cuatro ejemplos de problemas sobre proporcionalidad y razón, de distinto nivel de dificultad, y que iremos analizando a lo largo de este artículo:

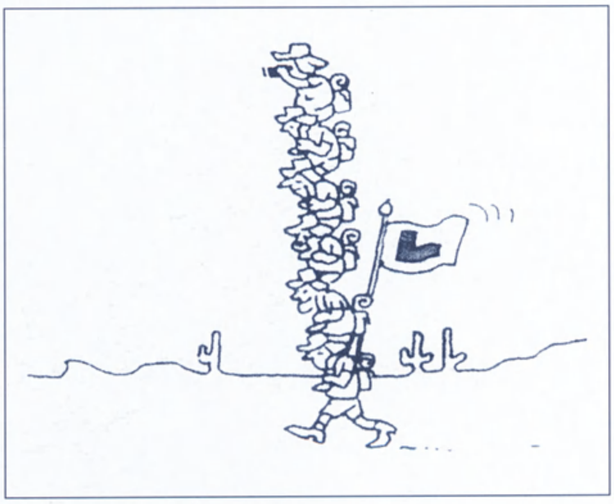
1. *La noche pasada estuvo un gigante en la escuela; dejó esta huella de su mano en la pizarra. ¿Qué altura tiene el gigante?*

2. *15 huevos cuestan 1,80 ≠; ¿cuánto cuestan 8 huevos?*

3. *Las representaciones de los esqueletos de estos dos mamíferos son, sobre el papel, aproximadamente del mismo tamaño, aunque en la realidad los animales tienen tamaños diferentes, y lo que pasa es que están dibujados a escalas distintas. ¿Qué animal es el mayor?*



4. *Observa esta viñeta con un grupo de exploradores, ¿tienes algún comentario que hacer?*



El concepto de razón es, sin duda, uno de los fundamentales de las Matemáticas. Además, es un concepto importante en todas las ciencias y juega un papel en la vida cotidiana. Desde la cuna, todos nos enfrentamos a situaciones que implican el uso de las razones y de la proporcionalidad.

Las experiencias de los primeros ocho o nueve años de la vida de una persona son principalmente experiencias visuales. En edades muy tempranas, los niños reconocen representaciones a *escala* sin muchos problemas y usan la *semejanza* como una *equivalencia operativa.* Verdaderamente es una maravilla. Es una maravilla que párvulos reconozcan modelos de animales y de objetos, independientemente de la escala de dibujo y de la posición. Me parece importante que se base la enseñanza del tema de razones en esta capacidad intuitiva, conservando siempre un cierto equilibrio entre los aspectos numéricos y los aspectos geométricos de las mismas.

AMPLIACIÓN: *SALUDOS DE PARTE DEL GIGANTE*

Vamos a analizar el ejemplo 1 del epígrafe anterior, reproduciendo la discusión habida en un grupo de alumnos de siete-ocho años de edad.

> "¿Cómo sabéis que eso es la mano de un gigante?", dice la maestra.
>
> "Por supuesto es una mano de gigante", responde Juan, "nunca vi una mano tan grande".
>
> "¿Qué pensáis?", dice la maestra, "¿sería el gigante mayor que yo?"
>
> Pronto, los alumnos deciden que el gigante es mucho mayor.
>
> "¿Por qué pensáis eso?", dice la maestra.
>
> Peggy razona: "La mano del gigante es mucho mayor que tu mano. Pues entonces el gigante es mucho mayor".
>
> Este es un razonamiento típicamente basado en la creencia de la conservación de razones *internas*.
>
> La maestra continúa: "Demuéstralo. Pon la mano en la pizarra. ¿Como cuánto de grande es el gigante?"
>
> Muchas respuestas: "Tan grande como el aula, tan grande como un árbol..."
>
> Estas respuestas no van en la línea de las intenciones de la maestra, por lo que da una indicación: "Mirad mi mano y la del gigante. Comparad".
>
> Otra vez pone su mano al lado de la huella de la mano de la pizarra.
>
> "Las manos del gigante son 3 veces mayor", dice Enrique.
>
> Los niños van a la pizarra a medir; la mano del gigante resulta ser 4 veces mayor que la de la maestra.
>
> "¿Sabéis ya qué altura tiene el gigante? ¿Puede ser 10 veces mayor que yo?"
>
> "No", dicen algunos.
>
> Miguel dice: "Será 4 veces más grande que tú, pues la mano del gigante es 4 veces mayor que tu mano".

De nuevo, este es un razonamiento basado en el concepto intuitivo de proporcionalidad.

La maestra lanza nuevas preguntas: "¿El gigante puede tenderse en el suelo de nuestra aula? ¿Cómo podemos investigarlo?".

Los niños hacen distintas propuestas. Enseguida deciden usar una cuerda para medir. Después, cortan un trozo de cuerda que es 4 veces más largo que la maestra y lo ponen en el suelo. Cabe bien. Al terminar la clase, los alumnos escriben una cartita al gigante: "Pensamos que usted es tan alto como esta cuerda".

Esta ha sido la descripción breve de una clase que fue muy interesante e instructiva. El tema *"Los saludos del gigante"* fue descrito en una publicación del *IOWO*, institución predecesora del *Instituto Freudenthal*, en el año 78. Considero que es un buen ejemplo del enfoque realista[1] de la Matemática.

Se dedicaron en total siete sesiones a realizar actividades e investigaciones sobre ampliación y proporcionalidad. En la última clase de la serie, la maestra dice que quiere tejer manoplas para el gigante.

"Para tricotar mis manoplas me basta con un ovillo de lana. ¿Cuántos ovillos de lana se necesitan para el gigante?"

La respuesta "cuatro ovillos" parece obvia, pero un dibujo en la pizarra muestra que no es correcta. El problema de las manoplas es una fuente de más ejercicios, por ejemplo: ¿Cuántas horas nos llevará el trabajo?, ¿cuánto cuesta la lana?, etc.

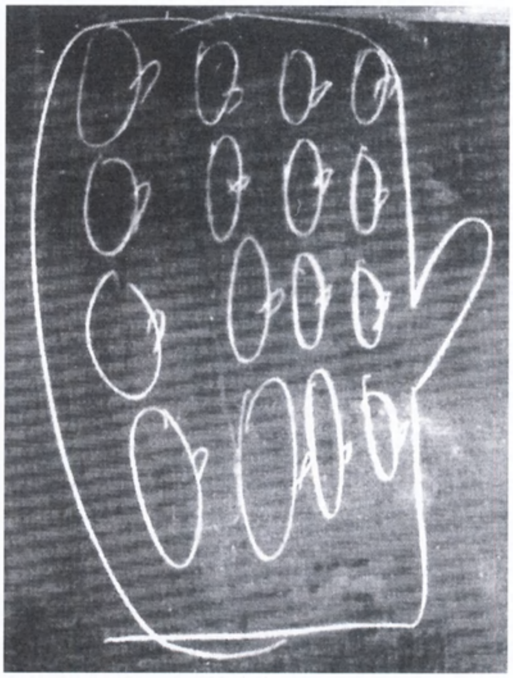
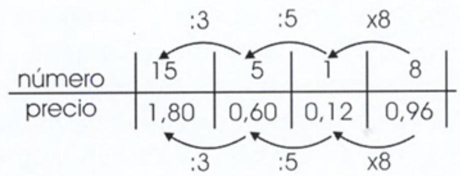


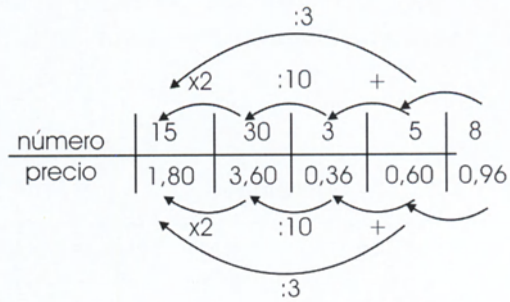
TABLA DE RAZONES Y DOBLE LÍNEA DE NÚMEROS

Los siguientes problemas son del mismo estilo que el ejemplo 2 del epígrafe introductorio de este artículo: el coste de 15 huevos conociendo el de 8. Éste es de un tipo muy clásico y hay muchas maneras de resolverlo. El método que ahora es popular en Holanda, es *usar una tabla de razón*:

[1] El enfoque *realista* de la enseñanza de las Matemáticas se basa en la construcción de los conceptos por parte de los alumnos, a partir de la modelización de situaciones reales apropiadas.



Es un método sencillo y efectivo, y estimula el cálculo flexible. Además es muy abierto: se puede calcular en muchos pasos o en pocos, prolijamente o brevemente, como se quiera.

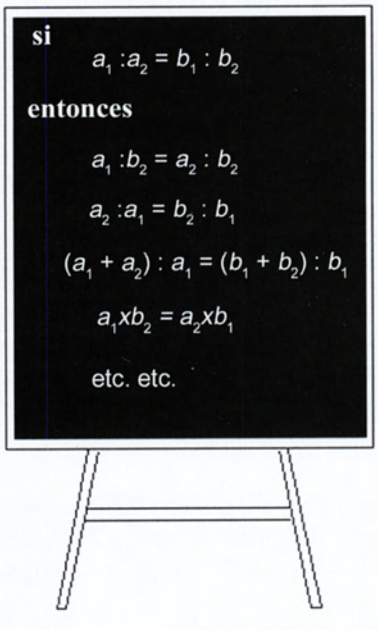


Otro ejemplo del mismo estilo: *en cocer 15 huevos se tarda 4 minutos; ¿cuánto tiempo se tarda en cocer 8 huevos?*

El enunciado parece insípido, lo reconozco. Pero es importante que combatamos el automatismo ciego de aplicar un mismo método a problemas que *suenan* igual, sin antes haber reflexionado en su contexto concreto.

El aspecto numérico del concepto de proporción no ha sido nunca fácil y la práctica de la enseñanza lo confirma. Pero depende del enfoque, hay muchos algoritmos para ello, cada uno distinto de los demás.

Por ejemplo, en mi juventud debíamos aprender un montón de reglas sobre proporciones, como éstas:



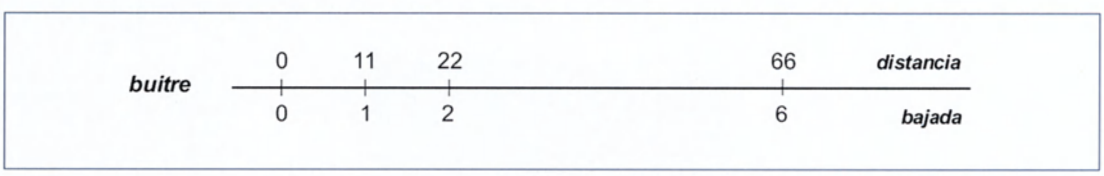
El peligro de este montón de reglas es que para la mayoría de los alumnos sea tan sólo un conjunto de trucos que tiene que aplicar automáticamente. Pero los alumnos son autómatas poco seguros: comenten equivocaciones y, además, las reglas distintas van a interferir entre ellas, fomentando las confusiones en su aplicación. De hecho, la tabla de razones puede reemplazar a todas las reglas y, además, es conceptualmente sencilla.

Una buena alternativa de la *tabla de razones* es *la doble línea de números*. Veámosla sobre este ejemplo:

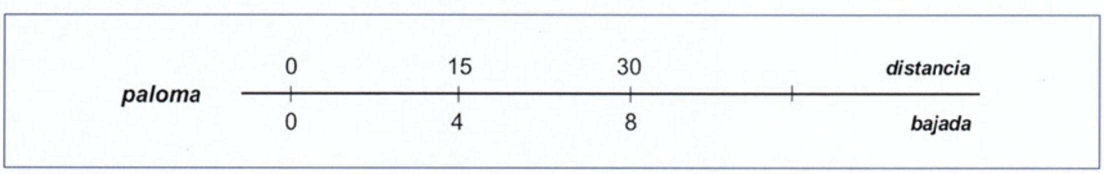
El buitre puede planear muy bien. Durante un vuelo planeado, sin aletear y sin el apoyo de corrientes de aire, un buitre baja un metro por cada once metros de planeo en horizontal.

Buitre	
Distancia (metros)	Bajada (metros)
11	1
66	6
22	2
...	...

En lugar de la tabla, se puede usar la línea de números:

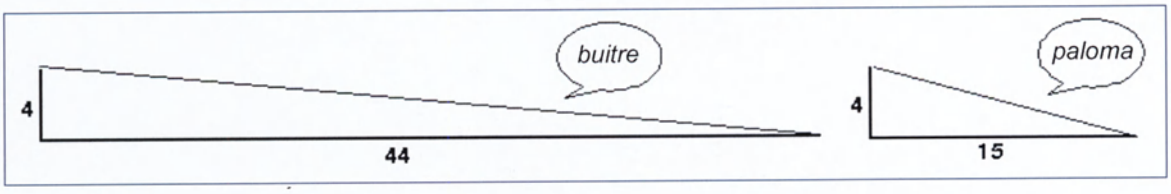


La paloma puede planear también, pero no es ciertamente la campeona de las aves:



¿Cómo podemos comparar estos dos vuelos planeados? Tomemos dos bajadas iguales o dos distancias iguales. Aquí, lo primero es lo más fácil. Para bajar 4 metros, la distancia de vuelo planeado del buitre es 44 metros, y para la paloma es no más de 15 metros.

Otra posibilidad para comparar las cualidades de planeo es hacer un dibujo del vuelo en escala:



Estos dibujos explican claramente la proporcionalidad entre la distancia de planeo y la bajada.

El *número característico* para el buitre es 11, es decir:

$$\textit{distancia de planeo} = 11 \times \textit{bajada}$$

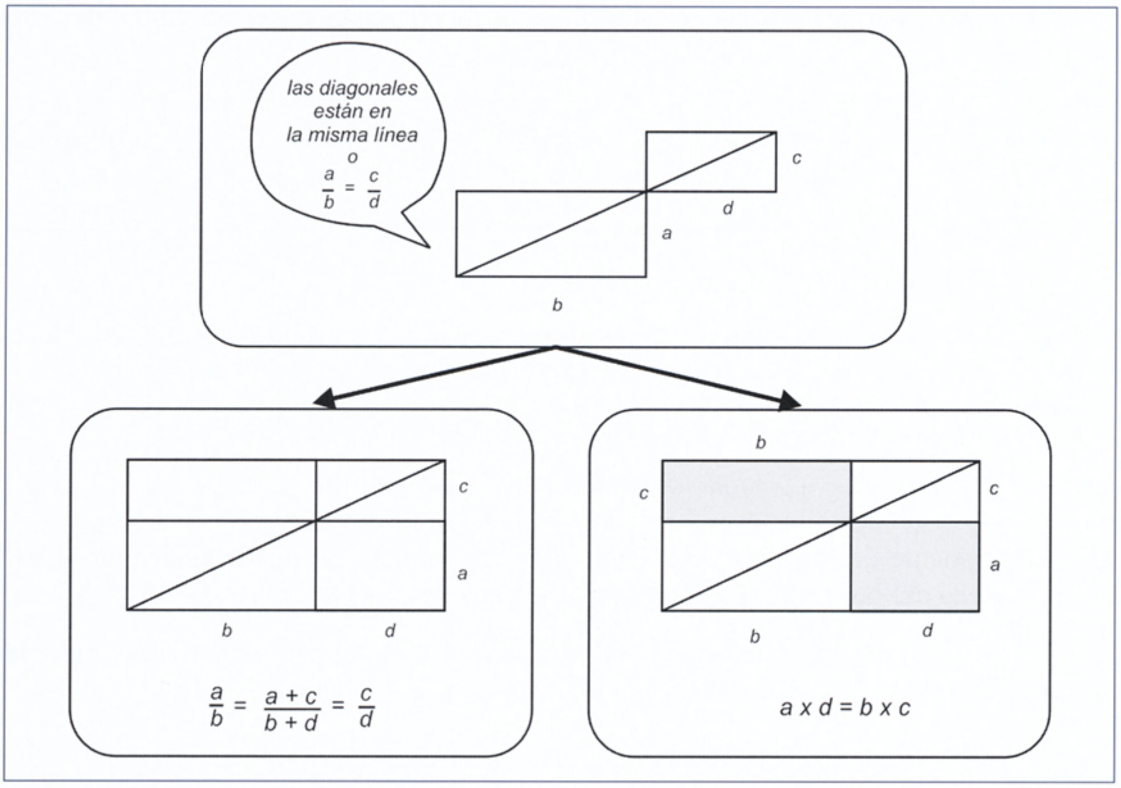
independientemente de los valores de *distancia* y de *bajada.* Se puede decir que 11 es la *razón de planeo* del buitre. Para la paloma la *razón de planeo* es 15/4 = 3,75.

El factor de proporción, o *razón de planeo*, es por tanto el instrumento adecuado para comparar capacidades de planeo. He aquí algunas:

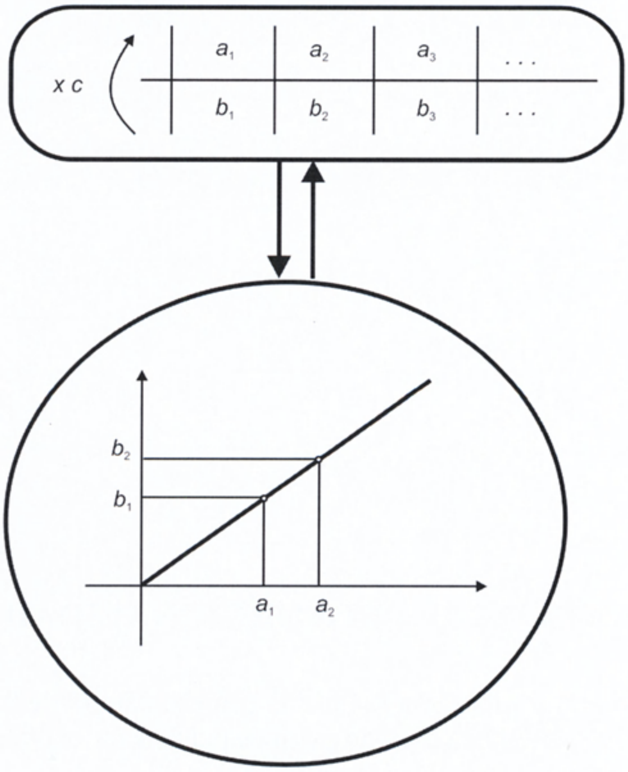
Vuelo planeado de	Razón de planeo
Planeador	35
Albatro	20
Boeing 747	15
Buitre	11
Vencejo	10
Piéride de las coles	4
Ardilla voladora	2,5
Langosta	1,5

GEOMETRIZACIÓN DE LA PROPORCIONALIDAD

Reflexionemos ahora un momento sobre la representación geométrica de la proporcionalidad. Todas las reglas del cálculo con razones pueden ser explicadas geométricamente, usando rectángulos semejantes. Por ejemplo:



Otro ejemplo de geometrización de la proporcionalidad es la gráfica:



De hecho, esta última representación está muy cerca de la anterior, pero es más abstracta.

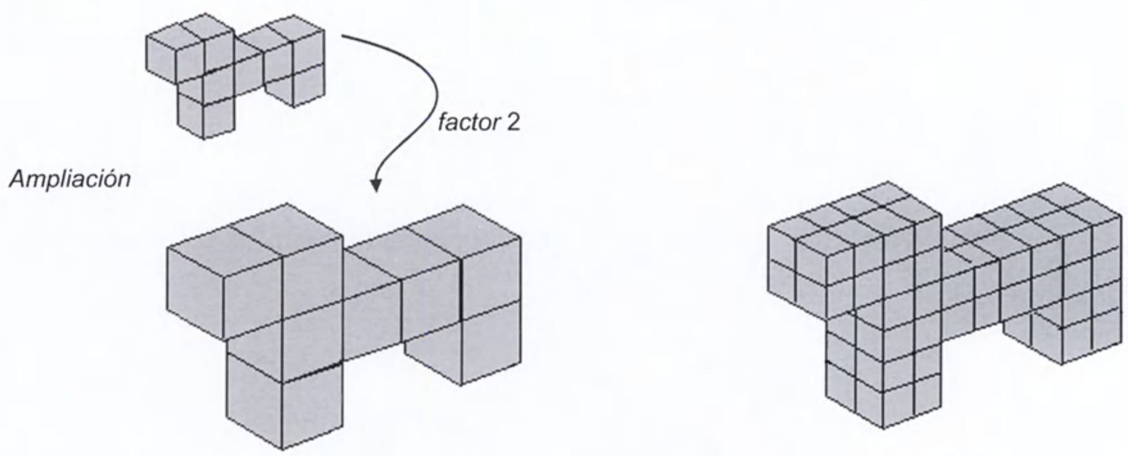
La constante *c*, que es el factor de proporcionalidad (o *razón externa*), viene representada por la pendiente de la gráfica. En la Física este factor es interesante en muchas ocasiones, porque tiene el significado de una magnitud nueva. Por ejemplo: la razón entre *peso* (o mejor masa) y *volumen* es la *densidad.* O, para un movimiento uniforme, la razón entre *espacio recorrido* y *lapso de tiempo* es la *velocidad.*

LAS LEYES DE AMPLIACIÓN

Veamos ahora el ejemplo 3 de los introductorios a este artículo, la comparación entre los tamaños de dos animales a partir de la representación de sus esqueletos.

Realicé esta experiencia con dos grupos de unos cien alumnos, en dos colegios de Burgos. Las dos veces, las respuestas *"es más grande el animal A"* y *"es más grande el animal B"* fueron mitad-mitad, más o menos. En la primera escuela fue exactamente el 50%, puesto que un alumno optó por A y otro por B, los demás no quisieron optar. En la segunda escuela, casi todos participaron en la encuesta.

De todos modos, la respuesta correcta no es evidente. Estudiemos estas figuras:



Una ampliación del perro *cubista* con un factor lineal 2 tiene como consecuencia que la superficie se multiplica por 4 (como en el ejemplo de las manoplas del gigante) y que el volumen se multiplica por un factor 8. Consecuentemente, el peso aumenta también en un factor 8.

Sin embargo, la capacidad de apoyo en el suelo es proporcional al corte transversal de las patas (que aumenta sólo un factor 4). Para sostener el cuerpo, las patas deben ser proporcionalmente más gordas. Por ello, la respuesta correcta del problema 3 es el animal A. De hecho la figura A representa el esqueleto de un rinoceronte (pero sin cuerno) y la otra la de un tejón.

Vemos que la Geometría da respuesta a preguntas como: *¿Por qué las patas de los mamíferos grandes son más gordas, en comparación, que las patas de las especies más chi-*

cas?, ¿por qué los árboles viejos son gruesos y los árboles jóvenes delgados?, etc. Las respuestas se basan en las leyes de ampliación de escala:

Leyes de aumento de la escala
Si todas las dimensiones de **longitud** son proporcionales entonces, para la **superficie** y el **volumen**, se tiene que la **superficie** es proporcional a la **longitud**^{2} el **volumen** es proporcional a la **longitud**^{3} o, con otras palabras: Si **f** el factor de ampliación entonces se multiplica **la longitud, la altura, el ancho**, etc. por **f** **la superficie** por **f**^{2} **el volumen** por **f**^{3}

Galileo fue probablemente la primera persona que prestó atención a la aplicación de este principio a cuestiones biológicas, como la del problema que nos ocupa. Para demostrar que el hueso de un mamífero grande no tiene un grosor proporcional a un hueso similar de un animal más pequeño, Galileo realizó esta ilustración:

¿Exageró Galileo? Sí. Podemos medir los huesos y concluir que Galileo quiso ilustrar una ampliación de factor 3. Multiplicó el diámetro por 9, el cuadrado de 3. Pero analicemos la situación. El volumen se amplia 27 veces, entonces la capacidad de sostén de los huesos debe ampliarse el mismo factor 27. Para que esta capacidad sea proporcional al área del corte transversal, el diámetro del hueso debe ser multiplicado con un factor:

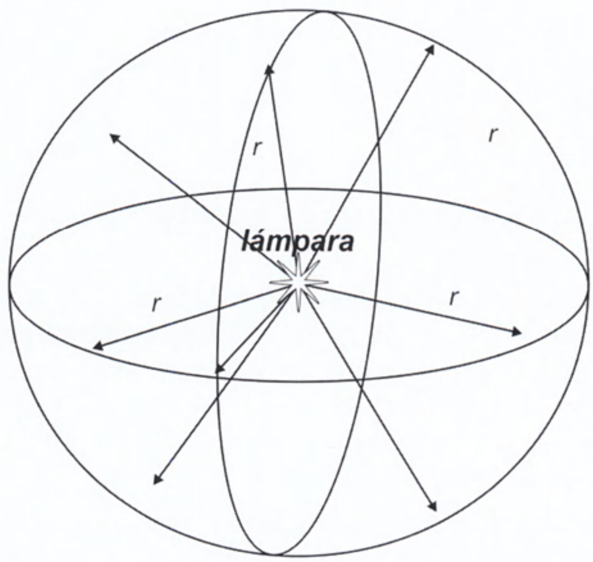
$$\sqrt{27} \approx 5$$

Sin duda fue un error de Galileo, y puede consolar a nuestros estudiantes el saber que incluso los genios se equivocan a veces.

EN RAZÓN INVERSA

La intensidad de la iluminación que produce una lámpara es menor conforme estamos más lejos de ella. Todo el mundo conoce esta experiencia. ¡Y este fenómeno puede ser explicado geométricamente!

Con un foco puntual, la luz que reciben todos los lugares equidistantes de la lámpara es la misma. Estos lugares están en la superficie de una esfera y la superficie de una esfera es proporcional al cuadrado del radio.

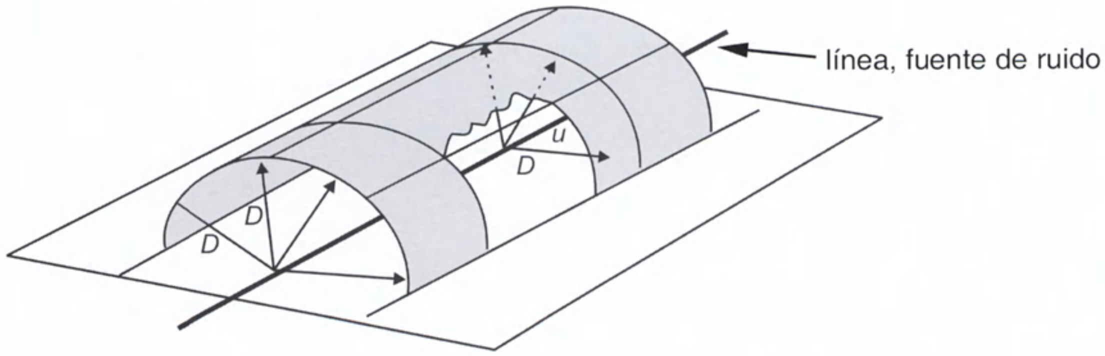


Distribución de la luz

Entonces podemos entender la siguiente ley: "la *intensidad de iluminación* es proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia de la lámpara".

Por ejemplo, si una lámpara de 100 watios está a una distancia de 2 metros de tu libro, puedes leer sin problemas. Pero si te alejas hasta 10 metros, ¿cuántas lámparas necesitas para tener la misma intensidad lumínica? Solución: 25 lámparas, pues si te vas 5 veces más lejos, la intensidad que recibes es $5^2 = 25$ veces menor.

Análogamente para el ruido, cuando la lámpara es sustituida por un foco fónico. Pero a veces el foco de sonido no es un punto. Por ejemplo, una autopista o la costa del mar en Holanda.



En toda la superficie del cilindro hay la misma intensidad de ruido

Si estamos muy cerca de una autopista, es posible hablar a volumen normal y que nos oigan. ¡Si estamos muy cerca una discoteca, esto no es posible! Sin embargo, si te alejas 1 km de la autopista, seguimos oyendo su ruido; pero a 1 km de distancia de la discoteca, ya no oímos nada.

Explicación: si el foco fónico es una recta, la potencia sonora está en razón inversa de la distancia; si el foco fónico es un punto, la potencia sonora está en razón inversa con el *cuadrado* de la distancia.

¿CÓMO DE LEJOS ESTÁ EL HORIZONTE?

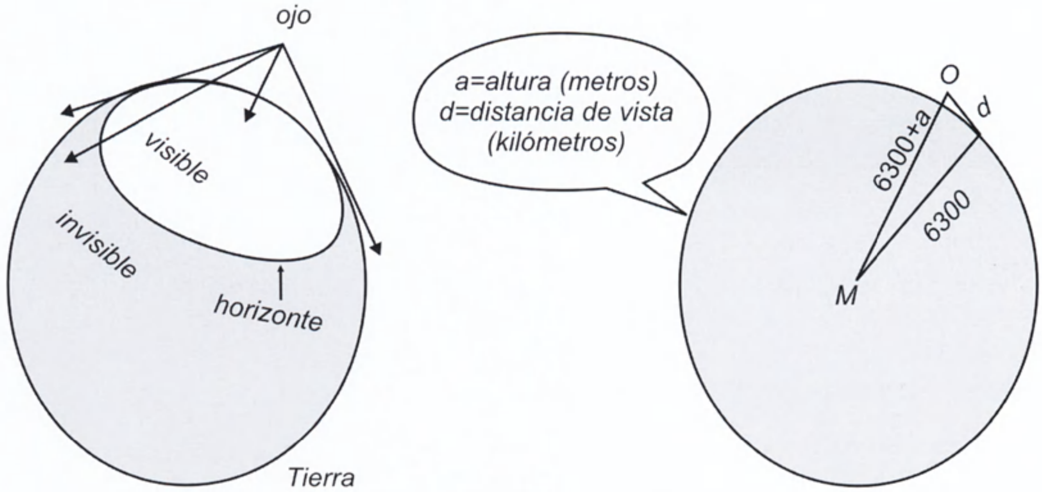
Veamos ahora el cuarto problema de los planteados en la introducción de este artículo, que trata del alcance de la vista de un grupo de exploradores. Antiguamente había en los barcos una *gavia* (en Holanda se llama *nido de corneja*), a la que se encaramaba un marinero para observar el entorno. Cuanto más alta estaba la gavia, el horizonte se veía más lejos. Nos preguntamos: *¿la distancia del horizonte* (distancia que alcanza la vista) es proporcional a la altura desde la que se observa, o no?

La tabla siguiente está hecha desde un hotel, pongamos en Benidorm, cerca de la playa. Es muy alto, de 20 pisos. Estudiemos la tabla. El aumento de la altura es constante (3 metros por piso), pero el aumento de la distancia decrece. Por tanto la altura y la distancia del horizonte no son proporcionales.

Piso	Altura (sobre el nivel del mar)	Distancia de vista	Aumento de la distancia
1	10 m	11,0 km	
2	13 m	12,6 km	+ 1,6 km
3	16 m	14,0 km	+ 1,4 km
4	19 m	15,3 km	+ 1,3 km
...	... ...	... ...	... ...
18	61 m	27,3 km	+ 0,7 km
19	64 m	28,0 km	+ 0,6 km
20	67 m	28,6 km	

Hay una observación interesante: al doble de la distancia 14 km (28 km) le corresponde la altura 64 m = 4 x 16 m, es decir, 4 veces la altura correspondiente a 14, y 4 es el cuadrado de 2.

Formulemos la siguiente hipótesis: la altura está en razón directa del cuadrado de la distancia de vista, o lo que es lo mismo, *la distancia de vista es proporcional a la raíz cuadrada de la altura.* Quizás. Esto es más o menos cierto y lo podemos explicar geométricamente. Miremos un corte lateral de la tierra (el dibujo no está en escala correcta).



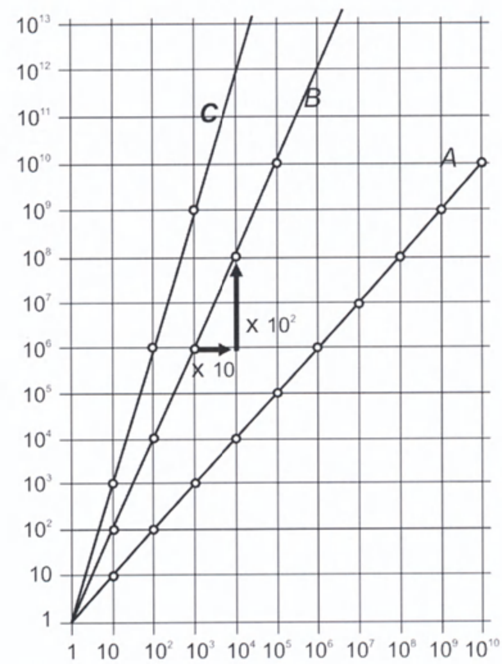
$$6300^2 + d^2 = (6300 + 0{,}001a)^2 \longrightarrow d^2 = 12{,}6a + 0{,}000001a^2 \longrightarrow d \approx \sqrt{12{,}6a} \approx 3{,}5\sqrt{a}$$

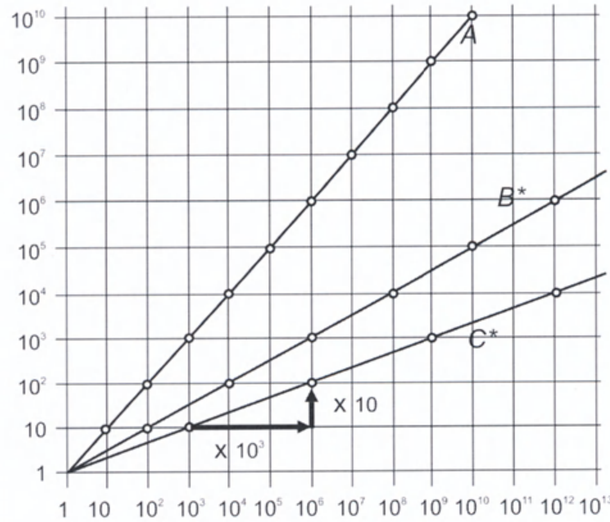
Por supuesto, esta regla solamente vale para alturas pequeñas respecto al radio de la tierra.

ESCALAS DE POTENCIAS DE DIEZ

Hemos visto ejemplos de proporcionalidad con el cuadrado, con el cubo, con la inversa, la inversa del cuadrado y con la raíz cuadrada. Podemos representar estos ejemplos de proporcionalidad gráficamente. Pero las gráficas son curvas, y la característica de la proporcionalidad *normal* (es decir, proporcionalidad *lineal*) es que la gráfica es una recta. Afortunadamente hay una herramienta para *linealizar* las gráficas en cuestión.

Utilicemos una graduación de los ejes muy especial, en que las sucesivas potencias de 10 son equidistantes.





Observemos el diagrama de la izquierda:

La línea A se corresponde con la fórmula $y = x$.

La línea B -recta con pendiente 2- se corresponde con $y = x^2$. Análogamente podemos comprender que la línea C -recta con pendiente 3- se corresponde con $y = x^3$.

Una traslación vertical de las gráficas, por ejemplo un paso hacia abajo, se corresponde con una multiplicación por 10; entonces salen las ecuaciones $y = 10x$, $y = 10x^2$ e $y = 10x^3$.

En el diagrama de la derecha, cuando simetrizamos las líneas B y C respecto de la línea A, obtenemos B^* y C^*, con pendientes, respectivamente, 1/2 y 1/3.

No es difícil constatar que estas líneas se corresponden con las fórmulas:

$$y = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt[3]{x}$$

Según el principio de la *permanencia algebraica-geométrica* podemos definir:

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

Del mismo modo, usando líneas de pendiente -1 y -2, podemos explicar la convención:

$$x^{-1} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

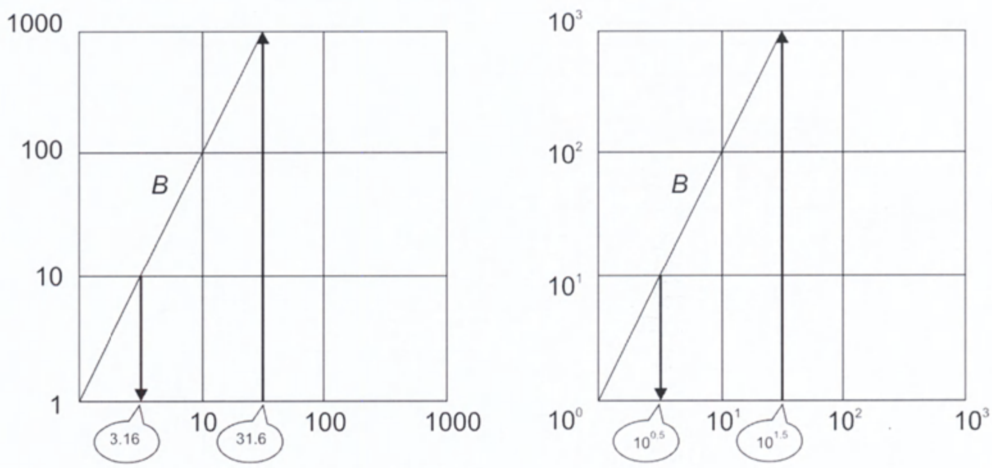
Aparece, por tanto, una posibilidad didáctica para la introducción de potencias negativas y fraccionarias, de un modo comprensible.

La graduación de los ejes que hemos utilizado se llama *graduación logarítmica* y tradicionalmente se enseña *después* del cálculo de logaritmos. Según mi idea, se puede utilizar la graduación con potencias de 10 como *introducción* del concepto logaritmo. Este proceso es un ejemplo de *inversión didáctica*.

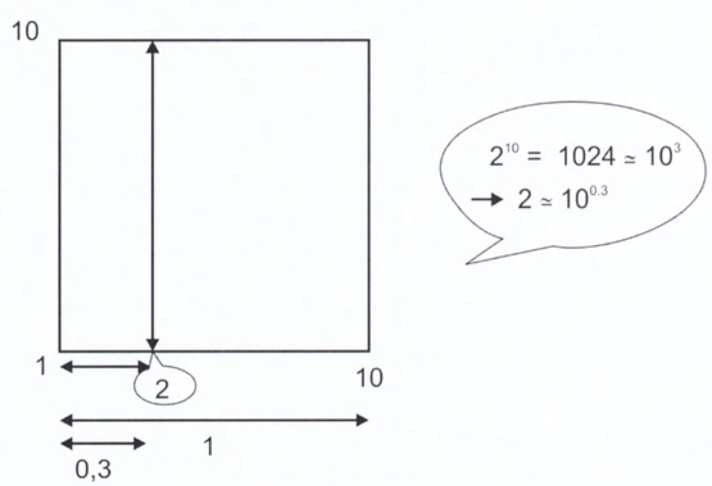
Para utilizar la graduación logarítmica con el fin de buscar el tipo de proporcionalidad adecuado a cada caso, debemos refinar la graduación. ¿Cómo hacerlo? Un primer paso puede ser: indique los puntos medios entre 1 y 10, 10 y 100, etc. Por el principio de permanencia, deben corresponder con

$$\sqrt{10}, \quad \sqrt{1000}, \ldots$$

que son las *medias geométricas* de 1 y 10, de 10 y 100, etc.

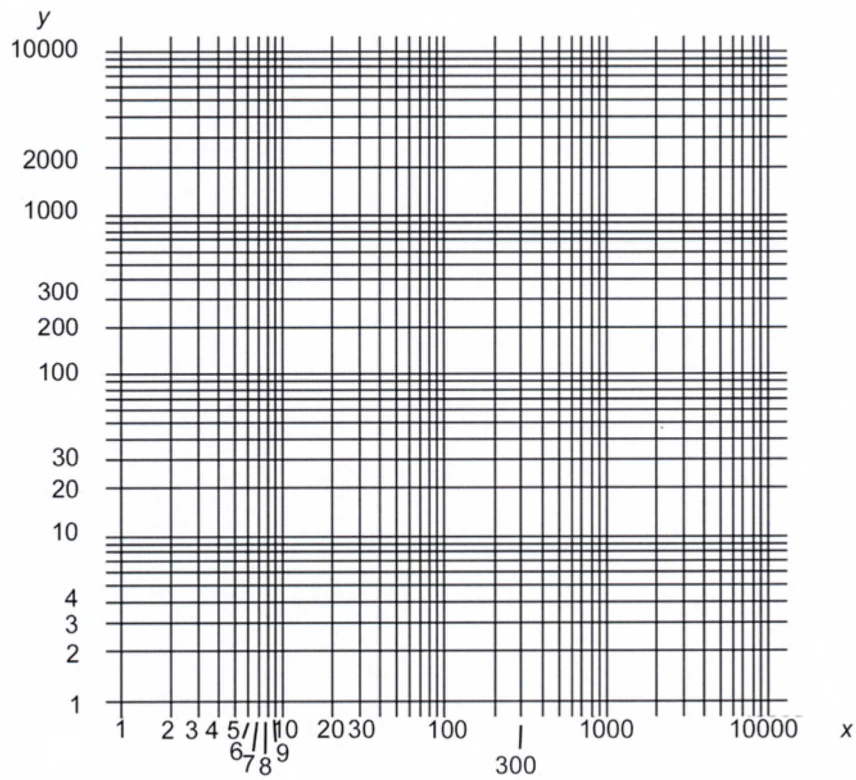


Pero la convención usual es localizar los números 2, 3, ..., 9, 20, 30, ..., 90, 200, 300, etc. Será suficiente con buscar los lugares de los números entre 1 y 10, ya que los otros aparecen como resultado de una traslación.



La figura anterior muestra una posibilidad para localizar el 2. Es importante que ésta sea una actividad realizada por los alumnos, usando la calculadora. Un descubrimiento puede ser que desde el lugar del 2 podemos saber directamente los lugares del 4 y del 8. Un poco más sofisticado es localizar 5, con ayuda del lugar de 2. ¡Esa es una anticipación a las propiedades de los logaritmos! Después viene el grupo 3, 6, 9 y, al fin, el lugar del 7.

El resultado es:

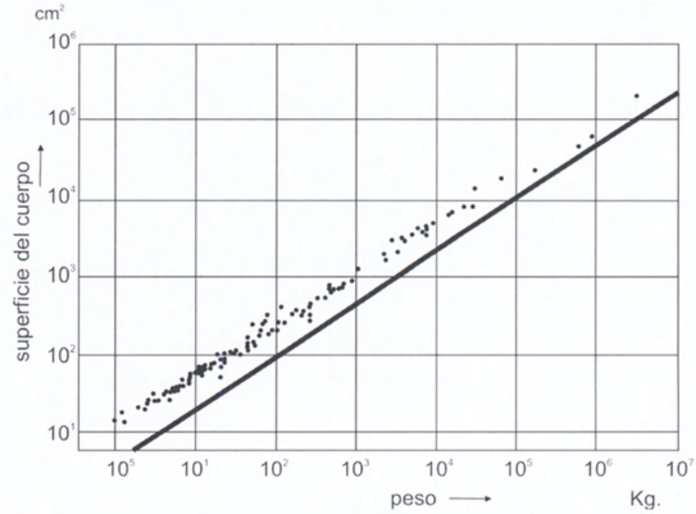


ALGUNAS APLICACIONES

1. El factor de proporción entre el peso del cuerpo (la masa M) y la superficie de la piel (S) es una potencia. Si L es la longitud del animal, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ es proporcional a } L^2 \\ M \text{ es proporcional a } L^3 \end{array}\right] \longrightarrow S^{1/2} \text{ es proporcional a } M^{1/3} \longrightarrow S \text{ es proporcional a } L^{2/3}$$

El siguiente diagrama muestra la gráfica, desde el ratón al elefante. Cada punto representa una especie animal.



Los distintos tipos de animales no son semejantes, ya que el factor de proporcionalidad (llamado *coeficiente de Meeh*) depende de la especie; por ello los puntos representados no son exactamente colineales. La línea de regresión de la nube de puntos tiene pendiente 2/3.

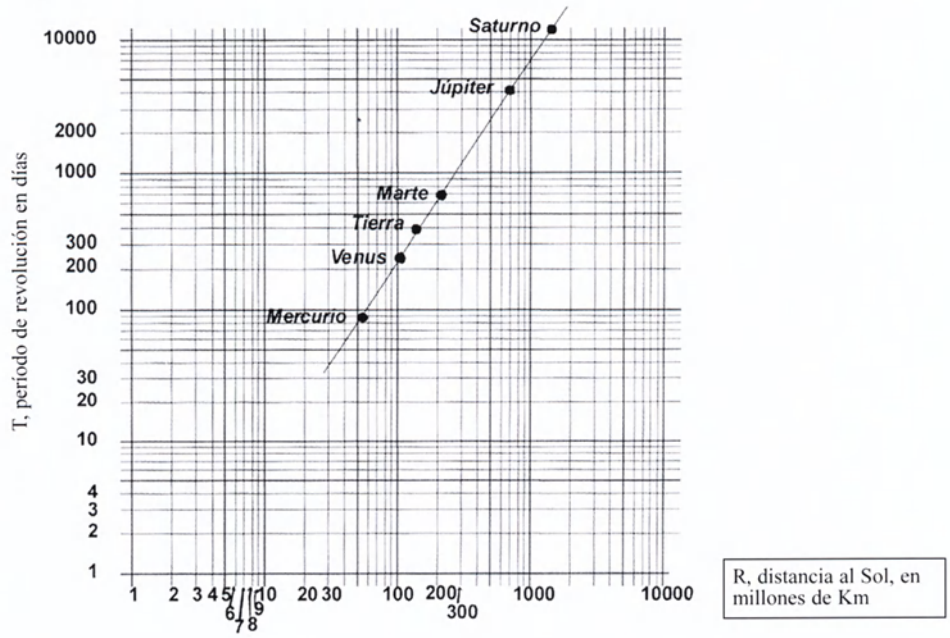
Observación: para la mayoría de los mamíferos el *coeficiente de Meeh* está próximo a 10; los animales pequeños tienen una forma que causa menos pérdida de calor, y tienen un coeficiente menor que 10 (por ejemplo, para el erizo es 7,5).

2. La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de las distancias del sol.

Veamos la tabla:

Planeta	**Período *T* (días)**	**Distancia media *R* al Sol (10^6 km)**
Mercurio	88	57,9
Venus	225	108,2
Tierra	365	149,6
Marte	687	227,8
Júpiter	4.329	778,3
Saturno	10.753	1.427,0
Urano	30.660	2.870,0
Neptuno	60.150	4.497,0
Plutón	90.670	5.907,0

Podemos representar la relación entre periodo y distancia en un sistema de coordenadas logarítmico:



Los puntos que corresponden a los planetas están casi perfectamente alineados y la pendiente de la gráfica es 1,5. Es una confirmación de la ley de Kepler, que vale también en otros lugares del Universo. Un buen ejercicio es la verificación para, por ejemplo, las lunas de Júpiter. Están en una línea con la misma pendiente, pero el factor de proporcionalidad es distinto al de los planetas del Sol.

Nombre	Año de descubrimiento	Distancia de Júpiter ($\times 10^3$ km)	Período de revolución (días)
Metis	1979	127,97	0,2948
Adrastea	1979	128,97	0,2983
Amalthea	1892	181,30	0,4982
Thebe	1979	221,90	0,6745
Io	1610	421,60	1,7691
Europa	1610	670,90	3,5512
Ganymedes	1610	1.070	7,1546
Callisto	1610	1.883	16,689
Leda	1974	11.094	238,72
Himalia	1904	11.480	250,57
Lysithea	1938	11.720	259,22
Elara	1905	11.737	259,65
Ananke	1951	21.200	≅ 631
Carme	1938	22.600	≅ 692
Pasiphae	1908	23.500	≅ 735
Sinope	1914	23.700	≅ 758

RESUMEN

He presentado unos ejemplos de *razonar con razones* en diferentes niveles de enseñanza. Para cada nivel podemos encontrar problemas desafiantes en esta misma línea. El tema de la proporcionalidad es muy rico y tiene muchas conexiones laterales con otras materias (por ejemplo, Biología). Las representaciones geométricas favorecen mucho la comprensión de los conceptos.

Quise mostrar implícitamente unos principios didácticos:

- *Que los alumnos tengan la oportunidad de desarrollar estrategias por sí mismos, y de inventar métodos eficientes a través del intercambio con otros alumnos.*
- *Que los alumnos tengan la oportunidad de razonar en problemas concretos y de comprender fenómenos, usando las leyes elementales de ampliación de escala.*
- *Que los alumnos se vean incitados continuamente para hacer representaciones geométricas.*

Estos principios son inherentes con la didáctica de reconstrucción (o reinvención), que es la característica principal del enfoque *realista* de la educación matemática.

PONENCIAS

¿DÓNDE ESTÁ LA MATEMÁTICA? MATARILE-RILE-RON

José Antonio Fernández Bravo
Centro Universitario de Enseñanza Superior Don Bosco

Hay que desprender a la Matemática de ese falso atavío de ojos tristes, penosos gestos y largas faldas negras. No es tan fea como se nos ha presentado; hay que sacarla a bailar con gracia, talento y razones que cautiven. La didáctica se encargará de poner música que levante el ánimo. A algunos de nosotros, y por nuestras experiencias, la lluvia nos ahoga el canto y a otros nos invita a cantar.

PRINCIPIOS BÁSICOS

El eje central de estas Jornadas se dirige fundamentalmente a saber qué hacer en una etapa educativa determinada, para que en la siguiente se pueda avanzar fructíferamente a partir de ese hacer. En nuestro caso, el enfoque de esta conferencia nos permitirá hablar, respecto al eje central, del tránsito de la Educación Infantil a la Educación Primaria. Cierto esto, y sabiendo que sí es importante el *qué enseñar*, no olvidaremos el *cómo enseñar*; a mi juicio, más importante que el *qué*. Muchos se preguntan: "¿Qué hay que enseñar?" Y, sin embargo, no se preguntan: "¿Qué obtenemos con eso que enseñamos?"

Yo quiero cambiar los saberes de contenido por principios básicos de conocimiento. Hablaré poco de contenido dedicando más tiempo, en la búsqueda de una acción didáctica, al desarrollo de esos principios básicos que operan en el conocimiento; los resumo en tres:

1. El desarrollo de la observación; hay que hacerse observador.
2. El desarrollo de la creatividad; hay que aplicar imaginación.
3. El desarrollo del razonamiento; hay que actuar de forma lógica.

Observación, creatividad y razonamiento, que hay que canalizar en el proceso de la metodología didáctica para la enseñanza de la Matemática. Permitir que interactúe aprendizaje y enseñanza, y fomentar esa participación del alumno que se debe, principalmente, a la búsqueda del conocimiento mediante el diálogo y la utilización de materiales en el aula y fuera de ella, más que al acierto por coincidencia de una respuesta, esperada por el tradicional antojo de la enseñanza para imponer preguntas preestablecidas. Y para que esos principios se puedan canalizar ortodoxamente es necesario hacerse algunas preguntas, en búsqueda de la Matemática:

¿Dónde está la Matemática? En las fichas, en los libros de texto. ¡No! La Matemática está en el pensamiento.

¿De qué se alimenta? Algunos dirán: "...bueno, pues de la reiteración de ejercicios y de cuantas más fichas se hagan y de cuantos más problemas se hagan y de...". Pero yo creo que se alimenta de ideas, parece que digiere números y letras pero lo único que digiere son razonamientos.

¿A qué se dedica? (A liarla por todos los lados, ¿verdad?). Y si se dedica a algo, ese algo es a establecer relaciones. Siempre he dicho que se puede hacer mucha Matemática con dos balones y tres platos y, sin embargo, se puede dejar de hacer trabajando con integrales dobles; todo depende de si eres capaz, o no, de establecer relaciones.

¿Qué materiales utiliza? (Números y letras, calculadora y ordenador. ¡No! Eso, en todo caso, es accidental). Los materiales esenciales que utiliza la Matemática son dos: la realidad y la evidencia. Es fundamental reconocerlos porque son esos los materiales que también utiliza el niño para desarrollar su pensamiento: realidad y evidencia.

¿Y cómo es ella? (La Matemática) Todo depende de como nosotros la veamos, porque es así como a ellos se la presentaremos. Pero ante todo hay que desprenderla de ese falso atavío de ojos tristes, penosos gestos y largas faldas negras. No es tan fea como se nos ha presentado; hay que sacarla a bailar con gracia, talento y razones que cautiven. La didáctica se encargará de poner música que levante el ánimo. A algunos de nosotros, y por nuestras experiencias, la lluvia nos ahoga el canto y a otros nos invita a cantar.

FALSAS APARIENCIAS

Esa es la cara de un niño y parece enfadado. Pero yo no sé si está, o no, enfadado hasta que no hable con él; suponemos mucho y escuchamos poco. Y es por eso por lo que desde el hablar escucho lo que me dicen. En algunos colegios veo a los niños en un rincón de la pared, de pie, y les pregunto: "¿Qué haces ahí?" Me dicen: "Estoy castigado a pensar". Esto parece ser que es lo que la escuela utiliza para provocar en los alumnos actividades de metacognición, porque así se espera que el alumno piense sobre lo que piensa, como preconizan ciertos hallazgos recientes de la pedagogía.

Pero él, qué piensa sobre el pensar:

"¿Por qué me castigan a pensar y me dicen que pensar es bueno y necesario?, ¿por qué me dicen que hay que estar siempre pensando? ¿Es que hay que estar continuamente castigado?"

¡Y cuando... la escuela utiliza la más ardua y clásica técnica para hacer avanzar el contenido, si hay alguna pequeña duda en el niño que a ese contenido pueda amenazar!: consiste en mirarle a los ojos y preguntarle muy seriamente si quiere ser mayor o no. Y por qué. No lo sé. Es que queremos decir algo como: ¡esto hay que entenderlo para que seas mayor! Has observado que a los niños pequeños se les amenaza con que, si no entienden algo, no van a ser mayores; y a los niños mayores, si no entienden algo, se les amenaza con irse a la clase de los pequeños. Tú no has observado que curricularmente es muy difícil que uno se ubique en un curso determinado, porque el pequeño está intelectualmente arriba y el mayor deprimidamente abajo. Tú le preguntas a un niño que ha terminado la Primaria: "¿Has hecho quinto?" Y te dice: "No lo sé". Ahora entenderemos por qué no lo sabe.

Y qué piensa el niño sobre el pensar de hacerse mayor o no. Yo supongo que él se hará preguntas:

"¿Por qué si no entiendo no me hago mayor? Mis padres me dicen que si no como, no me hago mayor, mis padres dicen que para hacerse mayor es necesario comer. Si entiendo y no como ¿me hago mayor?". "¡No quiero el plátano! Papá no me hace falta, hoy he entendido la suma".

Vamos a seguir pensando, pero el niño piensa de una forma y los adultos de otra; a veces existe entre esas dos formas de pensar una distancia de años luz. Desde nuestra mente de adulto, cuando vemos a un niño solo a las siete de la tarde en unos grandes almacenes, decimos: "¡mira, se ha perdido un niño!" Y digo yo, "¿por qué no se han podido perder los padres? ¿Por qué se tiene que perder siempre el niño?, ¿no iban juntos todos?"

SABER QUÉ SON LAS COSAS Y NO SÓLO CÓMO SE LLAMAN

Ya sabemos que partir del enunciado en el proceso de enseñanza-aprendizaje no tiene hoy sentido alguno. El enunciado es el punto de llegada de cualquier conocimiento.

La adquisición de un vocabulario y notación matemática es esencial para su formación; eso nunca se ha cuestionado. Pero ese vocabulario no servirá de nada, si no se asocia correctamente a la comprensión del concepto o relación que lo identifica. Lo importante no es que el niño sepa, sólo, cómo se llaman las cosas, cómo se dibujan, sino lo que realmente son. Ya se sabe que no existen símbolos matemáticos, que lo que existen son ideas matemáticas que a esos signos dan significado. La enseñanza suele confundir concepto y notación del concepto en el proceso de enseñanza y en el carácter de la evaluación: reconociendo cuánto el niño recita, más que cuánto el niño entiende. Se enseñan números, pero no se enseña el concepto de número; se enseña el símbolo más pero no se enseña el concepto de suma, se hacen restas pero no se enseña a restar, se resuelven problemas pero no se juega a pensar, y así sucesivamente. Y llenamos sus mentes de cantidad de palabras, de cantidad de signos vacíos, muchas veces, de actividad rentable para el alumno que se convierten para el saber en deleznables contenidos.

Si algo es importante en la Educación Infantil para la iniciación Matemática es empezar a establecer relaciones.

Algunos dicen:

- "¡Mira qué bien voy ya en el programa!"
- "¿Y eso?"
- "Pues mira, fíjate, que ya he visto todo esto con tres años y con cuatro repaso, con cinco..., con seis...; lo tengo todo ya *chupado*".

Y si eso es bueno para la enseñanza, dudo que lo sea para el aprendizaje. Y es que no nos damos cuenta que el conocimiento no se valida por cuánto veamos, cuánto enseñamos, sino por el grado de profundidad y asentamiento con el que cíclicamente favorecemos una disposición propedéutica para el aprendizaje de la Matemática.

LA COMPARACIÓN DE MAGNITUDES, ACTIVIDAD TÍPICAMENTE MATEMÁTICA

¿Largo o corto? ¡Ojo!, *largo* o *corto* no existe en Matemáticas. Algunas veces desprendemos a la Matemática de aquellos objetivos con los cuales la ponemos en paralelo. Y yo no digo en modo alguno que se hagan mal las cosas. Yo digo que creemos cubrir o alcanzar unos objetivos que no alcanzamos, porque en Matemáticas no existe eso de *largo* o *corto.* Podemos enseñar una cuerda y preguntar por su longitud, esperando, por ejemplo, que los niños digan: "¡corta!" Pero esa cuerda ni es corta ni es larga, pues depende de una relación comparativa que aún no se ha establecido.

En Matemáticas lo que existe es una comparación de longitudes. Se puede hablar de *más corto que, más largo que, menos corto que...* Es en este sentido de la comparación donde están las actividades matemáticas. Para que luego, cuando en Educación Primaria se encuentren con la necesidad de una unidad de medida, puedan comparar por el uso de esas unidades, evitando que se cometan errores por confusión entre escalar y medida. Uno de los errores se observa cuando tú hablas de 30 m y 108 cm. La longitud 108 es mayor, para la creencia del niño, debido a que el escalar 108 es superior a 30.

No miran el elemento de medida, no miran la unidad de medida, porque no se ha comparado la longitud, se ha establecido una comparación numérica. Ocurre también, fruto de esa ausencia de comparación, que cuando un alumno oye *metros* cree que es más largo que algo que se expresa en *centímetros.* Si tú dices: "dada una cuerda cuya longitud es 2 m y otra de 300 cm", él dice: "Mire, la más larga es la del metro porque el metro es más que el centímetro".

Es necesario abordar en la didáctica, actividades que favorezcan una dinámica de relaciones en función, siempre, de elementos comparativos.

Lleno y *vacío* también me asombra; pero, bueno, podríamos estar horas y horas hablando de cantidad de términos de esa índole. Lleno o vacío; bueno... veamos: una cosa es contrario y otra, muy distinta, *complementario.* Que no esté lleno, no indica en modo alguno que esté vacío. Yo jugaría con: *lleno* y *no lleno*. Y dentro de no lleno también hablaríamos de dos categorías, por ejemplo: *vacío* y *no vacío.*

LA PRECISIÓN EN EL VOCABULARIO AYUDA A FORMAR CONCEPTOS CLAROS

Podemos leer en textos de Matemáticas de distintas editoriales, para la Educación Primaria, problemas como el siguiente: “En una garrafa en la que caben 10 litros hay 3, ¿cuántos litros faltan para llenarla?” Y yo digo: “pues mire usted, ¡no lo sé! Porque verá: en una garrafa cuya capacidad es de 16 litros caben perfectamente 10, con lo cual está confundiendo el *caber* con la *capacidad*”.

En la Matemática existen términos claros y palabras expresas, sin ambigüedad alguna. No podemos jugar con la expresión subjetiva del alumno o del profesor; nos merece un gran respeto la perfecta comprensión del concepto y su correcta asociación con la terminología precisa. Entonces hay que aclarar muy bien en Educación Infantil lo que a Educación Infantil pertenece y exponerlo correctamente; no podemos llamar Matemática a cualquier cosa.

¿Cerca o lejos? Pero, ¿existe eso en Matemáticas? Cuántas veces decimos: “Mira, estoy cerca de la mesa”. Y yo digo: “Mire usted, eso es imposible, eso es como decir que Zaragoza está cerca de Madrid, yo lo único que puedo decir es que Zaragoza está *más cerca* de Madrid que Bilbao”. De ahí a decir que estoy cerca de la mesa o que Zaragoza está cerca de Madrid, existe una gran diferencia y hay tanta subjetividad que no pertenece a relación matemática alguna. Alguno pensará que, sin embargo, se dice: “Érase una vez un pueblo que estaba cerca de un bosque...”; ese *cerca* es lingüístico, con un sentido de proximidad. No lo evitéis, pero, por favor, sin darle el carácter matemático que pertenece a la objetividad: lo que es verdad para todos o mentira para todos.

Similares razones podríamos dar para “*delante* y *detrás*” Se está haciendo una didáctica del *delante-detrás* con el escondite, asegurando que lo que no se ve es lo que está *detrás*. Eso no se admite como verdad matemática, al tiempo que genera en el niño una confusión enorme. Si *delante* y *detrás* encierra algún concepto matemático va dirigido a una *dirección* y *sentido*, tener claro en qué dirección y sentido trabajo ubica perfectamente el concepto *delante de* y *detrás de* sin necesidad, en modo alguno, de ser o no ser visto. Como consecuencia, más tarde, tendremos dificultades en la interpretación de planos. Yo os podría dar un plano y jugar con vosotros con los conceptos: izquierda, derecha, delante y detrás; y no nos orientaríamos ninguno. ¡Claro!, porque ¿qué es delante? y ¿qué es detrás? Si miramos el plano desde arriba, ¿hacia dónde hay que ir?

Hay que conseguir que la didáctica se preocupe de no desnaturalizar las relaciones matemáticas de los conceptos que, nosotros decimos, pertenecen a la Matemática en Educación Infantil. Por lo tanto se exige, para el niño, claridad de conceptos y, para el adulto, para el profesor, precisión en el vocabulario. He comprobado que cuanto mejor se le habla al niño, mejor lo entiende. Esto es fundamental que lo sepa un profesor. Algunos profesores de Educación Infantil dicen: “Total, si son tan pequeñitos que no se enteran de nada”. Mire usted, se enteran de mucho; es más, tienen todo el derecho a escuchar bien, porque están construyendo su lenguaje.

LA LÓGICA, PRINCIPIO ACTIVO DEL PENSAMIENTO

Siempre he subrayado desde mi experiencia que la lógica es principio activo, sin el cual no se da reacción alguna en el pensamiento. Esto sirve de elemento de control para el profesor, al tiempo que muestra, en el alumno, la evolución o desarrollo de la capacidad para adquirir conocimientos.

Una proposición es lógica cuando es verdad para todos o mentira para todos, tengámoslo como control en la enseñanza. No puedo decir el lunes una cosa y el martes negarla, no puedo decir el miércoles una cosa y dentro de unos años decir que eso no era verdad. Yo no puedo decir que una pelota es grande, si para otro es pequeña.

Retomemos la cuestión anterior sobre *cerca* y *lejos*, es sumamente simple y, a la vez, necesaria la claridad de su comprensión. Muchas veces se ha tenido que explicar en Secundaria y Bachillerato para entender el concepto de límite. Algunos dicen: "Pues sí que hay gran Matemática encerrada en la Educación Infantil". Mucha más de la que nos imaginamos.

Les preguntaba muchas veces a los alumnos:

> "Dime un número que esté cerca de 5".

Y ellos decían el 4.

> "¡Qué lástima!, yo había pensado el 4, 9...".
>
> "Dime un número que esté cerca de 5".

El 4, 99999.

> "¡Qué lástima!, yo había pensado el 4,9999999".

Así que llegaban los alumnos a decir algo como: "Siempre ganarás, porque siempre habrá un número más cerca de 5 que el que nosotros digamos". (Gran teorema matemático).

Y pronto preguntaban:

> "¿Cuánto de cerca?".

Precisemos matemáticamente: 4 no está cerca de 5; 4 está más cerca de 5 que 3. Eso lo demuestra una simple diferencia: $5 - 4 = 1$ y $5 - 3 = 2$; y, $1 < 2$. Segundo: 4,9 está más cerca de 5 que 4,8. Tercero: me puedo acercar a 5 tanto como quiera, necesito un intervalo de aproximación para saber si gano o pierdo; ahí está la idea intuitiva sobre el concepto. Si yo juego con un concepto de proximidad no matemático, es imposible entenderlo.

- 4 = 2

- 3 = 5

- 1 = 2

Mirad, aquí vemos los números: 6, 4 y 2... Para que equivalga a 6, ¿qué número hay que sumar con 4? Dicen: 2. ¿Por qué? Porque 2 + 4 son 6; hago uso de un contenido previo: sumar. Para que equivalga a 8 ¿qué número hay que sumar con 3? Pues 5, ¿por qué? Pues porque 5 + 3 son 8. No hay más por qué.

En la frase "para que equivalga a 6 ¿qué número hay que sumar con 4?, dice 2", hay un *por qué* matemático único y exclusivo: porque 4 + 2 es 6; si existiese algún número que sumado con 4 diese 6 también se pondría pero, mire usted, es único: es el 2.

Posteriormente me dirijo al grupo de niños y les digo: "Esto que hacemos se dibuja así, y se lee *6 menos 4 es igual a 2*". Cuántas veces he visto a cantidad de profesores que le han dicho al niño: "Mira, si tú tienes 4 caramelos, ¿cuántos caramelos te faltan para tener 6?" Dice el niño: "2". Le pregunta el profesor: "¿Qué has hecho?". Dice el niño: "Una suma"; y el profesor asegura que eso que ha dicho el niño es incorrecto, que lo que hace es restar. Y yo digo ¿por qué mal? Si lo único que hace usted es sumar, entonces no confunda. Una cosa es lo que significa; otra, cómo se llama; otra, cómo se dibuja; ...pero el *por qué* matemático es el mismo. Estamos confundiendo el pensamiento con el dibujo de ese pensamiento. Nadie hace una cosa distinta a sumar, que representa mediante una simbolización que lee de forma convencional. Hay preguntas diferentes, hay por tanto cuestiones diferentes.

34

Este es otro de los ejemplos. Le dice el profesor al niño: "¿qué ves?" Dice el niño: "Un 3 y un 4". Dice el profesor: "Es *treinta y cuatro*". Yo pregunto a los que estáis leyendo esto, ¿veis algo distinto a un 3 y 4? Alguno de nosotros, pensará: "No, ¡ya! pero,... es que lo que yo quiero decir es... que...". Dígalo, pero no diga que no se ve un 3 y un 4, porque no es real ni evidente. Y, ante todo, los materiales que utiliza la Matemática son, como hemos indicado: la realidad y la evidencia.

¿Qué ves? "Un sombrero"... Todos conocemos este párrafo:

"Mostré mi obra maestra a las personas mayores... Las personas mayores me aconsejaron abandonar el dibujo... Las personas mayores nunca comprenden por sí solas las cosas, y resulta muy fastidioso para los niños, tener que darles continuamente explicaciones". (*El Principito*, Antoine de Saint Exupéry).

CONSTRUYENDO EL RAZONAMIENTO

SI A ENTONCES B

SI A, ENTONCES Y SÓLO ENTONCES, B

SI A	SI B
NO A	NO B
SI A	SI B
NO A	NO B

Jugando con la lógica hay algo que es principal: el estudio de la condicional. *Si A entonces B,* por ejemplo: si llueve entonces me mojo; si se enunciase así, podríamos jugar con cuatro posibilidades: afirmar *A*, negar *A*, y deducir el consecuente. Así, si yo digo que llueve, entonces puedo decir: "Mire usted, se va a mojar". Si yo digo que no llueve, entonces no se moja. O yo puedo afirmar y negar *B*, el consecuente, y puedo decir: me he mojado, entonces ha llovido; no me he mojado, entonces es que no ha llovido. Aquí, sin embargo, hay un error lógico, que es el siguiente: construida esa condicional de esa forma, y la condicional impera en el pensamiento de la lógica infantil, cometeríamos error, porque si afirmamos el consecuente, no por ello podemos afirmar el antecedente; es decir, yo me he mojado, pero no por ello puedo afirmar que haya llovido. Puede ser que me hayan echado un cubo de agua o puede ser que se haya roto una tubería.

Construiremos entonces las cosas así, para que nadie nos diga nada, y diremos: *si A entonces y sólo entonces B*, para que sea totalmente equipolente. Podemos afirmar *A* y entonces se afirmará *B*; podremos negar *A* y entonces se negará *B*; podremos afirmar *B* y se afirmará *A*, y podremos negar *B* y se negará *A*.

Bien, y todo esto ¿cómo se traduce didácticamente en Educación Infantil? A través de cuentos. En algún sitio leí que el cuento era la distancia más corta entre el niño y el conocimiento. Novalis decía que debería existir una *Fantástica*, del mismo modo que existe una Lógica. ¿Por qué no unir las dos?¿Por qué no podemos inventar cada día un cuento? Yo puedo inventar una relación: Si Juan ve un papel en el suelo entonces, y sólo entonces, lo recoge. Puedo contar un cuento a partir de esa relación:

"Érase una vez un niño que se llamaba Juan, que si veía un papel en el suelo entonces, y sólo entonces, lo recogía. Cuentan que a Juan le invitaron a una fiesta de cumpleaños, y cuentan que Juan vio un papel que estaba en el suelo y, ¿qué hizo?... *Lo recogió*. Cuentan que enseñándole una habitación vio un papel que no recogió porque... *no estaba en el suelo*". Esta relación es sumamente simple, pero es necesario habituar al alumno a ella. Hay relaciones más complejas, por supuesto:

Cuenta un cuento que había una vez una hormiga que se llamaba Livininiga. Livininiga iba paseando orgullosa de su nombre, un nombre original y creativo. Cuentan que, al cruzar por encima de un palo que servía de puente a un pequeño riachuelo, la hormiga perdió el nombre. Perdió el nombre y se disgustó muchísimo, porque era un nombre único. Siguió andando y se encontró con un animal al que preguntó: "¿Quién eres?".

El animal le contestó: "Yo soy un perro y ¿tú quién eres?".

"Yo soy una hormiga. Oye perro, ¿me puedes hacer un favor? ¿Puedes ayudarme a buscar algo que se me ha perdido?".

Y el perro dijo: "Claro, cómo no; si me dices tu nombre entonces, y sólo entonces, te ayudo a buscar aquello que se te ha perdido".

"Encantada", dijo la hormiga, "yo me llamo..."

Pero no pudo decirle...

a) Cómo se llamaba, porque...
b) Había perdido su nombre...
c) Al cruzar por encima de un palo que servía de puente a un pequeño riachuelo.
d) Y el perro...
e) No la pudo ayudar a buscar lo que se había perdido.

Y así podría seguir el cuento con otros animales y otras condiciones, generando una cadena de relaciones. Ya la relación no es simple. Ya no es Juan el que si ve, únicamente, un papel en el suelo lo recoge, sino que se estructura una cadena de relaciones que se encadenan unas con otras a base de condicionales.

Pero.. hay niños que cometen error al participar en el cuento, dirán algunos. Yo comento: nunca jamás quitéis una bicicleta a un niño que se cae; si se cae de la bicicleta y se la quitan, nunca aprenderá a montar en ella.

Algunos creen que la lógica está en los bloques lógicos, y nada más lejos de la realidad porque la lógica es una actividad mental que no pertenece a material alguno. Esto no quiere decir que no hagamos uso de materiales que, con actividades bien dirigidas, puedan desarrollar, eso sí, el pensamiento lógico. Pero el material no servirá de nada si no sabemos qué hacer con él, por eso lo importante no es tanto la utilización de bloques lógicos, sino la relación de actividades que puedes realizar a través de su manipulación. Si eso está claro no importa que tengamos, o no, bloques lógicos; cuántas veces unos elefantitos con colmillos o sin ellos, con trompa larga o con trompa corta, con manchas o sin manchas, juegan también a las curiosas clasificaciones que se pueden hacer por afirmación y negación de propiedades. Y clasificar esos elefantitos según el criterio... Y buscar los que tienen manchas, de trompa corta y sin colmillos; o los que tienen colmillos con manchas de trompa corta, o los de sin manchas con colmillos de trompa larga.

En grandes razones se apoyaba Giner de los Ríos cuando afirmaba en *Ensayos*: "Dadme al maestro y quitadme todo lo demás. Si tengo al maestro él se encargará de suplir todo cuanto necesite. Pero para qué quiero lo demás, si no tengo al maestro".

PROBLEMAS SIN NÚMEROS

¿Qué tipo de problemas hacemos? Pues hombre, los *normales*... ¿Por qué no empezamos con problemas sin número? ¿No te das cuenta de que la relación lógica es tan fundamental, que un niño no puede saber que "hay cinco manzanas en una cesta en la que hay tres manzanas y se echan dos", si no comprende la ley lógica condicional que está implícita en ese enunciado? Así, *si hay manzanas y echo manzanas, entonces tengo más manzanas.*

Todos los problemas tienen cadenas de relaciones lógicas condicionales. Observa, por ejemplo, esos problemas sobre dardos y puntos obtenidos que terminan preguntándonos: ¿Quién ganó? Hay una apreciación lógica esencial, sin la cual es imposible resolver el problema: "Si obtienes más puntos, entonces ganas". "Si obtiene más puntos, entonces gana", me preguntan por el que gana, me preguntan por el que ha obtenido más puntos. ¿Cómo sé yo quién ha obtenido más puntos? Es ahora y, posteriormente a ese pensamiento, cuando tenemos que ver qué mecanismos, técnicas y recursos aporta, para esa búsqueda, la Matemática.

DEVOLVAMOS AL NIÑO, LO QUE ES DEL NIÑO

En los textos de Educación Primaria se pueden leer problemas como los siguientes: "Una madre tiene 30 años y su hijo tiene 10. ¿Cuántos años tienen entre los dos?" Claro que yo tengo que mirar la solución, porque si yo ahora estudiase Educación Primaria ocurriría que o suspendería, o aprobaría, quizás, por una adaptación curricular por discalcúlico. Miro y en la solución escriben: 40, porque 30 años de la madre y 10 años del hijo son 40 años. Y digo yo: ¿y cómo se suma eso? ¿Cuándo tienen 40 años? O es que el hijo se pone encima de la madre y se miden y se suma y se pone la tarjeta del más, ¿cómo va eso? Si una madre tiene 30 años y su hijo tiene 10, 40 no tienen nunca. Pero, claro, después de mirar la solución, miro la guía didáctica. Y la guía didáctica, eso sí, escribe: "que hay que partir de la realidad y del entorno que circunda al niño en un ambiente emocional de afectividad que se represente siempre desde el descubrimiento y la construcción de los distintos conceptos...", bueno... y me pierdo. Vuelvo a leer la guía didáctica y dice que sí, que es verdad que parte de la realidad que circunda al niño y todo eso. Que parte de unos supuestos lógicos y que, por supuesto, tienen en cuenta las fuentes del currículo: la pedagógica, la epistemológica... El qué, cómo y cuándo... bueno... y me pierdo. Vuelvo al libro de texto y encuentro cosas como: "En una clase hay 30 niños, salen al recreo todos menos 2. ¿Cuántos niños quedan en la clase?" Yo digo: "es imposible, mire usted". ¿Cómo que es imposible?, me dicen. "Sí, es imposible que salgan todos menos 2, porque lo segundo contradice a lo primero. Si salen todos, salen todos; si salen menos dos, no salen todos. Yo no puedo entender esto".

Uno de los ejes centrales de estas Jornadas sobre la enseñanza de la Matemática se dirigía, como hemos dicho al empezar, a saber qué hacer en Educación Infantil para que en Educación Primaria se pueda avanzar fructíferamente a partir de ese hacer. Llegados a este punto, podemos pensar al revés en estas Jornadas. Darle la vuelta al tema y reflexionar desde otros argumentos: ¿qué hay que hacer en Educación Primaria para sujetar esas relaciones que con brillante esfuerzo de procedimientos se han trabajado en Educación Infantil? ¿Por qué en Primaria ya el juego no es importante? ¿Por qué la disposición de contenidos y el tratamiento didáctico de éstos tiene, en la etapa de Primaria, más que un sentido de continuidad un significado de preparación universitaria? ¿Por qué se utilizan sin demora esos textos martirizadores y abrumadores que obligan a cortar con todas esas actividades en las cuales la etapa Infantil, al menos, puso entusiasmo y aclaró con una pedagogía justificada? ¿Qué tiene que hacer con sus alumnos el profesor de Educación Primaria, para representar la validez de lo que en Educación Infantil han sido capaces de crear? Ya es hora de que no se mire siempre hacia abajo y se nos diga: "¡A ver si lo hacéis mejor!" También se puede mirar, de vez en cuando, hacia abajo y decir, con honestidad: "¡Lo siento, no puedo hacerlo como tú!"

Aún así, yo creo que, unos y otros, cometeremos menos equivocaciones epistemológicas, lógicas y psicopedagógicas en una Metodología Didáctica para la enseñanza de la Matemática, si dirigimos nuestros esfuerzos para que...

... los niños sepan bien, se sientan bien sabiendo, quieran saber y apliquen correctamente lo que saben. Es por tanto necesario devolver al niño, lo que es del niño. Y hacer coincidir nuestra mirada con su mirada infantil sintiéndonos, cada vez, más ESCUCHANIÑOS.

¡Música, entonces; matarile-rile-rile!
¡Y a bailar; matarile-rile-ron!

Para lo demás, para todo lo demás,
el tiempo al tiempo aportará respuestas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BAROODY, A. (1988): *El pensamiento matemático en los niños.* Madrid, Visor.

[2] BEAUVERD, B (1967): *Antes del cálculo.* Buenos Aires, Kapelusz.

[3] DÍAZ, E.M.; SÁNCHEZ, M. Y SANZ, N. (2002): "Un pez chiquitín llamado Benjamín", en *Cuento para el aprendizaje de la Matemática*, Madrid, CCS.

[4] FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995): *La Matemática en Educación Infantil.* Madrid, Ediciones Pedagógicas.

[5] FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2000): *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos.* Barcelona, CISS/PRAXIS.

[6] FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2002): *Numeración y cuatro operaciones básicas: la investigación y el descubrimiento a través de la manipulación.* Madrid, CCS.

[7] FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2002): "El Hipopótamo gracioso y fuerte", "La tortuga botarruga", "Los animales que se escaparon del circo", "Las nubes del país de la fantasía virtual", en *Cuento para el aprendizaje de la Matemática.* Madrid, CCS.

[8] GUÉTMANOVA, (1989): *Lógica.* Moscú, Progreso.

[9] KAMII, C. (1993): *El niño reinventa la aritmética (I y II).* Madrid, Visor

[10] KAMII, C. (1995): *El número el la educación preescolar.* Madrid, Visor.

[11] KOTHE, S. (1986): *Cómo utilizar los Bloques Lógicos de Dienes.* Barcelona, Teide.

[12] LAHORA, C. (1996): *Actividades matemáticas con niños de 0 a 6 años.* Madrid, Narcea.

[13] MASON, J.; BURTON, L. Y STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente.* Barcelona, MEC-Labor.

[14] CHINN, S. J. Y ASHCROFT, J. R. (1999): "Mathematics for Dyslexics", en *A teaching Handbook.* London, Whurr Publishers.

CUENTOS PARA APRENDER MATEMÁTICAS

Margarita Marín Rodríguez
Universidad de Castilla La Mancha

¿Vale la pena que un niño aprenda llorando aquello que puede aprender riendo?
Gianni Rodari

La palabra mágica "*Érase una vez...*" atrae poderosamente nuestra atención y nos tiene pendientes del narrador hasta escuchar "*... colorín colorado este cuento se ha acabado*", que marca el final y la resolución del conflicto planteado al principio. Por el camino, nuestra imaginación nos ha permitido disfrazarnos de uno de los personajes y vivir con él, sentir como él, sus peripecias. Hemos aprendido nuevas cosas y conocemos su valor y utilidad independientemente de la edad que tengamos, pero no cabe duda de que es de los tres a los ocho años el período en el que la atracción por los cuentos es máxima.

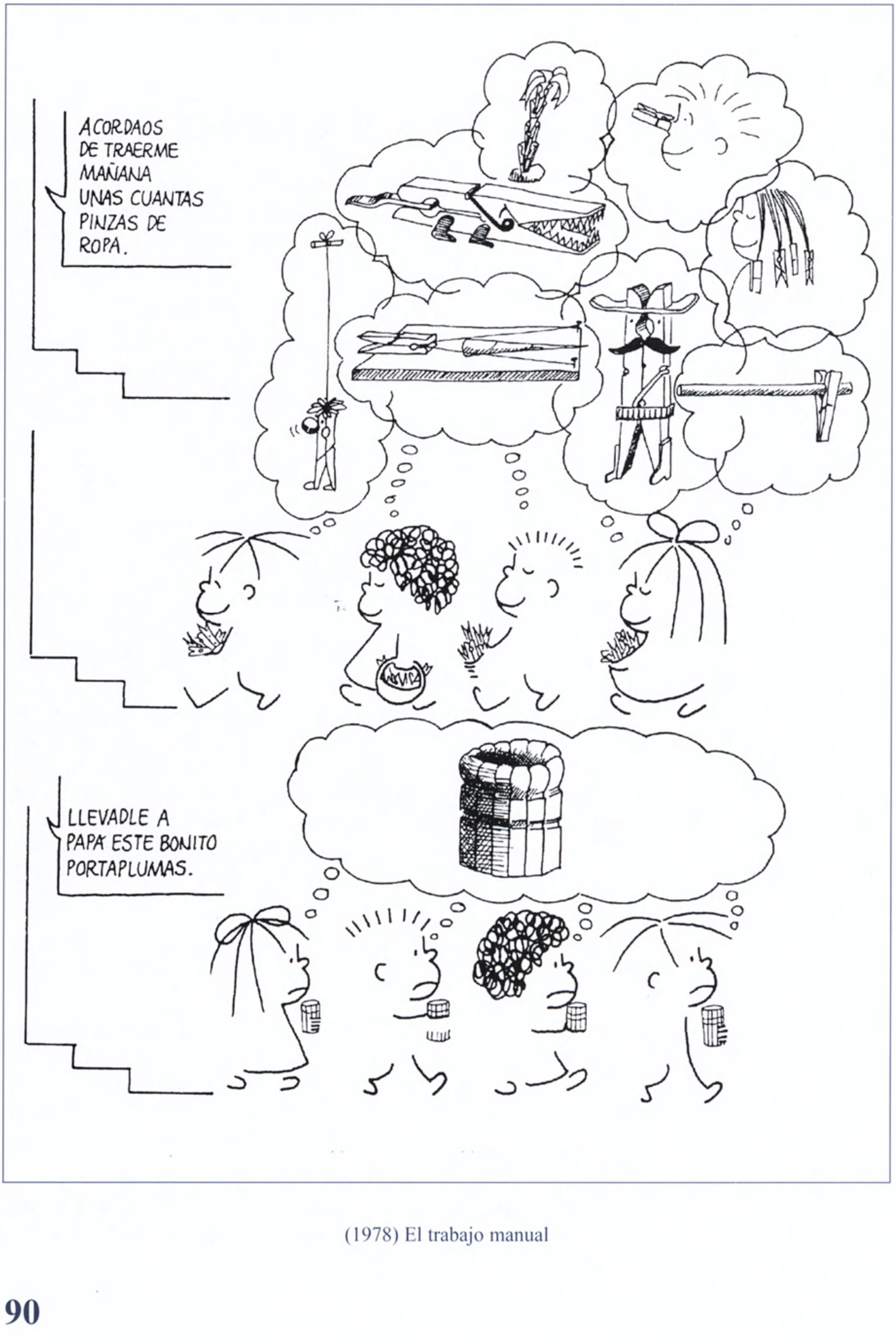
Contamos cuentos a los niños para entretenerlos, para ir a acostarse, para que aprendan un valor, una moraleja. Pero si los cuentos ejercen esta atracción sobre ellos, ¿por qué no emplearlos en nuestras aulas para motivar y provocar el aprendizaje de los conceptos matemáticos que deben manejar a estas edades? ¿Cómo podríamos utilizar un cuento como herramienta didáctica de aprendizaje matemático? ¿Nos serviría cualquier cuento?

Intentaremos contestar a estas preguntas a lo largo de la conferencia, utilizando para ello nuestra propia experiencia en las aulas de Infantil.

SER NIÑO, SER NIÑA

Ser niño o niña no es fácil, como nos lo demuestran los agudos y mordaces dibujos de Frato[1].

[1] Tomadas del libro de Francesco Tonucci (1989): *Con ojos de niño*, pp. 74 (*Las bolitas*) y 78 (*El trabajo manual*). Agradecemos a la editorial Barcanova su gentileza al permitirnos su reproducción.



(1978) El trabajo manual

(1969) Las bolitas

Por tanto, totalmente de acuerdo con Puig Adam (1960), antes de pensar en enseñar Matemáticas debemos averiguar *lo que el niño puede, debe y quiere aprender*. El primer verbo -*puede*- lo resolvemos conociendo sus características intelectuales, para lo cual recurriremos a las teorías psicológicas. Concretamente, según Piaget (1967), los escolares de 2º ciclo de Educación Infantil, tres a seis años, tienen un pensamiento preconceptual, caracterizado por el juego simbólico y la imitación diferida. Su herramienta es la percepción y no son capaces de generalizar. Al ir madurando, mediante las experiencias facilitadas por el entorno en el que se mueven, su estructura mental evoluciona al pensamiento intuitivo, caracterizado fundamentalmente por la irreversibilidad y la falta de conservación.

Alrededor de los siete, ocho años, su pensamiento entra en el período de las operaciones concretas, alcanzando la reversibilidad así como la conservación de la masa, peso, número y volumen.

Además, este desarrollo intelectual está en estrecho paralelismo con el desarrollo de la afectividad. De hecho, en un acto intelectual intervienen sentimientos múltiples, como los intereses, los valores, la satisfacción o el temor y, recíprocamente, en un acto afectivo intervienen capacidades intelectuales. Los niños y niñas de tres a siete años están desarrollando sus sentimientos interindividuales (afectos, simpatías y antipatías), los primeros sentimientos morales y las regulaciones de intereses y valores.

El segundo verbo -*debe*- será respondido desde nuestros conocimientos científicos y matemáticos, es decir, ¿qué supone *aprender* Matemáticas a un escolar de tres a seis años?

Según Alsina y otros (1996), la intención del Ciclo es que los niños organicen el conocimiento que tienen de las cosas que les rodean. Para conseguirlo es fundamental el desarrollo de las capacidades de clasificar, ordenar, agrupar, organizar e interpretar, que les permitirán la estructuración mental adecuada para poder hacer Matemáticas. Estas capacidades serán desarrolladas mediante los siguientes núcleos temáticos:

- Cantidad, más importante que el número en sí.
- Medida.
- Espacio y tiempo.
- Procesos lógicos.

Todos ellos conllevan el aprendizaje de conceptos, procedimientos, valores y normas.

Igualmente, los autores anteriormente citados hacen gran hincapié en que es fundamental para un buen aprendizaje matemático, actual y posterior, que el niño piense y exprese sus razones.

Por su parte la NCTM[2] (1991) mantiene para esta etapa la enseñanza y aprendizaje matemáticos desde los cuatro pilares básicos, es decir:

- Las Matemáticas como razonamiento.
- Las Matemáticas como resolución de problemas.
- Las Matemáticas como comunicación.
- Las conexiones matemáticas.

Estos aspectos están completamente interrelacionados entre sí, lo que supone que los niños de estas edades deben investigar, discutir, preguntar y verificar, y nuestra enseñanza debe estar encaminada a conseguirlo.

Apoyándonos en estas ideas y en nuestra experiencia personal, podemos concluir que el aprendizaje matemático a estas edades supone:

- El comienzo de su red matemática conceptual.
- El gusto y una actitud positiva hacia la materia.
- La utilización de procedimientos básicos: clasificar, ordenar, organizar e interpretar.
- La génesis de conceptos primarios a partir de la manipulación, reflexión y abstracción.

Respecto al último verbo, -*quiera aprender*-, podremos contestar con arte para atraerlo y captar su interés, es decir, con nuestro conocimiento de recursos y estrategias de aula realmente atractivos para el niño. Y uno de estos magníficos recursos es el cuento, ya que una vez conocidas las características intelectuales del párvulo y sus necesidades matemáticas, podemos inferir que el cuento encaja en perfecta sintonía con su juego simbólico. Puede representarlo haciendo una imitación diferida del mismo; puede discutir y preguntar

[2] *National Council of Teachers of Mathematics*, influyente asociación estadounidense de profesores de Matemáticas.

sobre los variados aspectos de la narración facilitando la comunicación matemática; le permite fomentar su capacidad de abstracción entendiendo valores como *maldad, bondad, avaricia, generosidad*, etc.; puede vivenciar sus sentimientos ante el relato manifestando sus simpatías y antipatías ante los personajes, así como utilizar la moraleja para sentar las bases de su moralidad.

EL CUENTO COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

El profesor australiano Egan (1994) califica el cuento como *herramienta de aprendizaje* con el objetivo de facilitar la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Las razones para introducir el cuento en nuestras aulas de Educación Infantil serían las ya escritas por Marín (1999):

1. El cuento es un medio comunicativo que facilita la comunicación entre docente-narrador y discente-oyente.
2. Nos permite utilizar la fantasía de los niños, su creatividad e imaginación, a la vez que las potencia.
3. Facilita la unión del significado cognitivo con el afectivo, tan importante a estas edades y tan olvidado en una educación lógica y racional, sobre todo en Matemáticas.
4. Nos permite realizar una educación transversal, uniendo las frías Matemáticas con los valores difundidos a través del cuento. Estos valores inciden directamente en los sentimientos de las personas facilitando el acceso al conocimiento.
5. Igualmente, procuraremos despertar sentimientos de simpatía en el niño para que comience a construir su estructura lógica-matemática con gusto y entusiasmo.
6. Y, por último, realizaremos la enseñanza de las Matemáticas de acuerdo con un elemento usual en el entorno lúdico del niño, que disfrutará aprendiendo Matemáticas.

Dadas estas razones, pasemos a analizar el tipo de cuentos que se puede emplear.

¿QUÉ PODEMOS CONTAR PARA APRENDER MATEMÁTICAS?

En nuestras aulas podemos utilizar con buen aprovechamiento matemático tanto cuentos clásicos conocidos por los niños como inventados por los maestros y maestras para explicar un concepto concreto, siempre teniendo en cuenta los principios básicos de la estructura de un cuento. No podemos olvidar que un cuento es una unidad narrativa que tiene un principio y un fin. Este comienzo fijo "*érase una vez...*" crea una expectativa y plantea un conflicto que se irá resolviendo a lo largo del relato. A partir de este momento, todo gira en torno a su resolución, eliminado lo superfluo, lo innecesario en su relato, hasta su final con la frase "*...colorín colorado, este cuento se ha acabado*". Así mismo, cualquier cuento bien elaborado tiene que suscitar nuestras respuestas afectivas. Los valores que aparecen en la narración inciden directamente en los sentimientos de las personas, motivándonos a escuchar o leer y a vivir las peripecias del o de los personajes, por lo que el cuento perdura largamente en la memoria y por ende los aprendizajes realizados con o a partir de su lectura.

Lo importante es leer el cuento con *ojos matemáticos*, buscando las conexiones matemáticas del mismo, es decir: primero registramos las palabras existentes en su texto que expresan o se relacionan con conceptos matemáticos y, segundo, diseñamos las actividades que éstas y los acontecimientos narrados nos sugieren para aprender dichos conceptos. Lo explicamos con más detalle en el epígrafe siguiente.

¿CÓMO HACERLO?

Es decir, ¿cuáles serán las estrategias de aula aconsejadas para conseguir el aprendizaje a partir de la narración? Contestamos a esta pregunta a partir de nuestra experiencia y la de nuestro alumnado de la Escuela Universitaria de Magisterio de Ciudad Real que, en su período de prácticas, trabajaron este tema con los párvulos. Permítannos los mismos consejos prácticos ya recogidos en Marín (1999):

1. Es muy importante elegir el texto y la forma narrativa del cuento, así como su longitud, para llevarlo al aula.
2. Un mismo cuento tiene distinta narración según su soporte sea papel, cinta de audio o cinta de vídeo.
3. Normalmente, para nuestro objetivo matemático los soportes más adecuados son: la narración directa por el maestro/a y la cinta de audio.
4. La cinta de vídeo mata la imaginación, la representación mental y la creatividad. Todo la clase pinta de la misma y única manera a los personajes: la que muestra la cinta.
5. A la hora de utilizarlos en la realización de patrones, es necesario proveerse de los rollos suficientes de papel de caja registradora, así como de rotuladores de colores diversos, tampones y almohadillas de tinta para los mismos, figuras recortables y tijeras romas.

En cuanto a estrategias concretas, debemos recordar que nuestra intención es fomentar un proceso activo de aprendizaje en el que se conduce al párvulo a *descubrir* los conceptos disciplinares soportados por el cuento para su mejor asimilación y estructuración mental. Por ello, nuestra metodología de trabajo está fundamentada en:

- *El aprendizaje en contexto*, puesto que los contenidos matemáticos aparecen en la propia narración con una razón de ser, por lo que presentamos al aprendiz una visión amplia e integrada de las Matemáticas, facilitando que éste perciba la vitalidad, riqueza y utilidad de las mismas.

- *El diálogo interactivo* entre el narrador y los oyentes, lo que permite el análisis de los conceptos matemáticos emergentes en el cuento y el razonamiento y comunicación matemáticos.
- *La realización de las actividades en pequeño y gran grupo*, lo que posibilita un aprendizaje cooperativo y colaborativo.

Igualmente recordemos que, en las aulas de Infantil, la enseñanza debe ser globalizada, por lo que de la narración de un cuento nos servirá para trabajar conjuntamente con otras áreas, así como la psicomotricidad.

Analizamos tres casos concretos.

El flautista de Hamelín

Es un cuento clásico contado a los niños por los valores que encierra: la tacañería del alcalde y la venganza del flautista frente a la generosidad del niño cojito que, pese a ser *diferente*, no duda en hacer lo necesario para salvar a sus compañeros de juegos. Además de esta enseñanza en valores, el texto adaptado que encontramos en un libro de la editorial Everest, recogido completo en el Anexo I, nos resulta perfecto para entresacar palabras del vocabulario matemático del párvulo, y hacer actividades de iniciación o profundización a partir de las mismas después de su narración.

Estas palabras, clasificadas por los contenidos matemáticos a los que están ligadas, son:

- Nociones de precálculo:

  muchos años, una pluma, todas, sin quedar ni una, demasiado, menos, poco, tremenda.

- Nociones de orden:

  hasta la última rata.

- Nociones de medida respecto a:

  la magnitud longitud: *alto-bajo* (un hombre alto y flaco).

  la magnitud masa-peso: *grueso-flaco* (un hombre alto y flaco).

  la magnitud volumen-capacidad: *profundo-somero* (fueron llevadas al río donde se ahogaron).

  la magnitud tiempo: *años, día.*

  tamaño: *grande-pequeño* (gran bolsa de oro).

- Nociones geométricas:

  realización del recorrido del flautista-ratas, flautista-niños.

  aspectos topológicos: *abierto-cerrado* (la montaña se abrió).

  situación espacial: *bajo* (una flauta bajo el brazo), *ante* (ante la montaña).

- Temporalización de sucesos.

Las actividades que se pueden realizar a raíz de la selección de estos términos estarán en función de la edad de los niños y de sus conocimientos previos sobre los mismos. Así, con tres años, el cuento nos sirve para profundizar en los cuantificadores numéricos por sus valores opuestos: *todo-nada, muchos-pocos, más-menos*; las relaciones de orden: *ser el último, ser el primero*; la medida cualitativa de la magnitud tamaño: *grande-pequeño*; y las nociones topológicas *abierto-cerrado.* Así mismo, mediante el coloquio dirigido, analizamos la temporalización de sucesos: ¿qué se llevó antes el flautista, las ratas o los niños del pueblo?, etc.

Con cuatro años podemos repasar las nociones anteriores y trabajar la medida cualitativa de las magnitudes longitud y masa; los conceptos de orientación espacial e intentar una representación del cuento siendo un niño el flautista y el resto, en cuclillas, las ratas para simbolizar *alto-bajo.*

Con cinco años, además de repasar lo anteriormente expresado, el cuento permite la representación de recorridos pueblo-montaña por los diversos protagonistas, ejecutados por algunos niños, mientras que los otros dan órdenes: gira a la derecha, avanza recto, etc., para recorrer el circuito diseñado.

El pollito Pito y sus amigos

Hemos elegido este relato, cuyo texto completo se encuentra en el Anexo II, como prototipo de cuento repetitivo que puede ser modelizado mediante un *patrón.*

De hecho, el libro *Nivel inicial* de la serie Addenda de la NCTM (1991) señala la importancia de la utilización de estos cuentos en la generación de patrones. Los patrones son el primer paso a la modelización del niño de Infantil. Además, una vez creado el patrón, le permite leer el cuento tantas veces como desee, independientemente de su nivel de lectura gramatical y, posteriormente, este patrón realizado por los niños pasará a formar parte del *rincón de los cuentos* (Zabalza, 1987) dentro de su aula, siendo de uso común para todos.

Previamente a la elaboración del patrón de un cuento, necesitaremos haber llevado a cabo una serie de actividades con patrones simples, repetitivos y acumulativos de tal manera que los niños entiendan perfectamente el concepto de *patrón,* sepan construirlo e interpretarlo una vez hecho y pasado un tiempo.

Una vez entrenados los párvulos en la identificación de secuencias básicas y su representación en patrones, contaremos el cuento, si es la primera vez, pudiendo utilizar en narraciones sucesivas cintas de audio. La razón de este consejo se debe a que con la primera historia deberemos hacer mucho hincapié en la aparición de cada nuevo personaje y en la lista de los mismos. Acabado el relato y comprobada su compresión, los niños agrupados o individualmente, según el docente considere oportuno en función de variables educativas, se pondrán de acuerdo en los símbolos que emplearán para representar los personajes y dibujarán el patrón en papel.

Al igual que el texto completo, los gráficos utilizados para realizar un patrón para este cuento se encuentran en el Anexo II, y ha sido experimentado con niños de cuatro-cinco años.

Globilandia

Es un delicioso cuento elaborado por Mª Cielo Moreno, en el curso 96/97 en el que era alumna de la EU de Magisterio de Ciudad Real. Los protagonistas son conceptos matemáticos; concretamente está concebido para que niños y niñas de tres años profundicen en las medidas cualitativas de la magnitud tamaño. Su moraleja es perfecta: lo importante es la calidad de nuestro interior, no nuestra forma exterior; lo que nos permite erradicar en clase esa costumbre de señalar, y a veces aislar, a los párvulos diferentes del resto por ser más bajitos o más altos, tener la piel clara o tostada, practicar una determinada religión, o ser de una cultura distinta a la española, a la vez que potenciar una convivencia en paz, tolerancia y armonía.

Su texto completo, con ilustraciones de la autora, está recogido en el Anexo III y puede visualizarse en la dirección: <http://www.uclm.es/profesorado/mvmarin/>

A MODO DE CONCLUSIÓN

A lo largo de la conferencia hemos querido argumentar que la utilización del cuento como herramienta didáctica de aprendizaje es un acierto en la enseñanza de las Matemáticas, con niños y niñas de tres a seis años.

En nuestra exposición ha sido fundamental la experiencia de nuestro alumnado de la Escuela de Magisterio de Ciudad Real que, en su período de prácticas, han comprobado personalmente el interés y el ambiente mágico despertado por la narración entre los niños y niñas de las aulas de Infantil, incluyendo aquellas de contenidos netamente matemáticos. Los párvulos *viven* su proceso de aprendizaje como un juego más y asumen perfectamente su papel en el mismo. Los aprendizajes tienen una razón de ser y los niños colaboran con el docente en su consecución.

Por tanto, un consejo, ¡¡contemos las Matemáticas!! y las aprenderemos con gusto e interés.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ALSINA, C. Y OTROS (1996): *Enseñar Matemáticas*. Barcelona, Grao.

[2] BRAVO-VILLASANTE, C. (1990): *China, china, capuchina, en esta mano está la china*. Madrid, Susaeta.

[3] EGAN, K. (1994): *Fantasía e imaginación: su poder en la enseñanza.* Madrid, MEC-Morata.

[4] FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995): *Didáctica de la matemática en educación infantil.* Madrid, Ediciones Pedagógicas, col. Aula-taller de Psicopedagogía.

[5] MARÍN, M. (1999): "El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos", en *Números,* nº 39, pp. 27-38.

[6] MIRA, M.R. (1989): *Matemática "viva" en el parvulario.* Barcelona, CEAC.

[7] NCTM (1991): *Estándares curriculares y de educación matemática.* Sevilla, SAEM Thales.

[8] PIAGET, J. (1967): *Seis estudios de psicología.* Barcelona, Seix Barral.

[9] PIAGET, J. (1973): *Psicología y Pedagogía*. Barcelona, Ariel.

[10] PUIG ADAM, P. (1960): *La matemática y su enseñanza actual.* Madrid, MEC, Publicaciones de la Revista Enseñanza Media.

[11] RODARI, G. (1996): *Gramática de la fantasía. Introducción al arte de inventar historias.* Barcelona, Ediciones del Bronce.

[12] RODARI, G. (1999): *El libro de los errores*. Madrid, Espasa Juvenil.

[13] ZABALZA, M. A. (1987): *Didáctica de la educación infantil*. Madrid, Narcea.

ANEXO I

El flautista de Hamelín

(Recogido del libro *Religión, material de apoyo didáctico*, Equipo Aldebarán, Everest)

Hace ya muchos años, en la ciudad de Hamelín, se declaró una tremenda invasión de ratas. Los repugnantes roedores llenaban casas y casas, y el alcalde ofreció una gran bolsa de oro a quien librara a la ciudad de una plaga tan desagradable.

Y un día llegó a Hamelín un hombre alto y flaco, con una pluma en el sombrero y una flauta bajo el brazo, que prometió librar la ciudad hasta de la última rata.

Efectivamente, empezó a tocar su flauta mágica y, cautivadas por la música, las ratas le siguieron hasta que todas, sin quedar ni una, fueron llevadas hasta el río, donde se ahogaron.

Mas cuando el flautista fue a cobrar la recompensa, el alcalde le dijo que era demasiado dinero por tocar un poco la flauta y que le pagaría menos. Enfurecido, el flautista prometió vengarse y salió a la calle tocando de nuevo la flauta. Todos los niños del pueblo se fueron tras él, menos uno cojito que no pudo seguirles. Y, al llegar a una montaña, ésta se abrió ocultándoles.

En Hamelín todos lloraban desconsolados, hasta que el niño cojito halló la flauta mágica y, tocando ante la montaña, ésta volvió a abrirse y los niños pudieron volver a sus casas.

ANEXO II

Pollito Pito y sus amigos

(Recogido del libro *Religión, material de apoyo didáctico*, Equipo Aldebarán, Everest)

Un día Pollito Pito fue al bosque y... ¡pum!, le cayó una ciruela en la cabeza.

– "¡Ay, Dios mío!" -dijo muy asustado. *"El cielo se va a caer y el rey lo debe saber. Voy deprisa a darle la noticia".*

Camina que te camina se encontró con gallina Fina.

– "Buenos días pollito Pito. ¿Dónde vas tan tempranito?"
– *"El cielo se va a caer y el rey lo debe saber. Voy deprisa a darle la noticia".*
– *"Pues voy yo también a decírselo al rey".*

Y allá fueron los dos, gallina Fina y pollito Pito, camina que te camina hasta que se encontraron con gallo Malayo.

Pollito Pito Gallina fina Gallo Malayo

– "Buenos días, gallina Fina y pollito Pito. ¿Dónde vais tan tempranito?"
– *"El cielo se va a caer y el rey lo debe saber. Vamos deprisa a darle la noticia".*
– *"Pues voy yo también a decírselo al rey".*

Y allá fueron los tres, gallo Malayo, gallina Fina y pollito Pito, camina que te camina hasta que se encontraron con pato Zapato.

– "Buenos días, gallo Malayo, gallina Fina y pollito Pito. ¿Dónde vais tan tempranito?"
– *"El cielo se va a caer y el rey lo debe saber. Vamos deprisa a darle la noticia".*
– *"Pues voy yo también a decírselo al rey".*

Y allá fueron los cuatro, pato Zapato, gallo Malayo, gallina Fina y pollito Pito, camina que te camina hasta que se encontraron con ganso Garbanzo.

– "Buenos días, pato Zapato, gallo Malayo, gallina Fina y pollito Pito. ¿Dónde vais tan tempranito?"
– *"El cielo se va a caer y el rey lo debe saber. Vamos deprisa a darle la noticia".*
– *"Pues voy yo también a decírselo al rey".*

Y allá fueron los cinco, ganso Garbanzo, pato Zapato, gallo Malayo, gallina Fina y pollito Pito, camina que te camina hasta que se encontraron con pavo Barbado.

- "Buenos días, ganso Garbanzo, pato Zapato, gallo Malayo, gallina Fina y pollito Pito. ¿Dónde vais tan tempranito?"
- "El cielo se va a caer y el rey lo debe saber. Vamos deprisa a darle la noticia".
- "Pues voy yo también a decírselo al rey".

Y allá fueron los seis, pavo Barbado, ganso Garbanzo, pato Zapato, gallo Malayo, gallina Fina y pollito Pito, camina que te camina hasta que llegaron al palacio del rey.

Pato Zapato

Ganso Garbanzo

Pavo Barbado

- "Escucha, rey amado, el cielo se ha rajado. Mándalo componer, porque se va a caer".

El rey les dio las gracias y a cada uno les regaló un centimito de oro.

El cielo se va a caer y el rey lo debe saber.

El rey...
camina que te camina...

Vamos deprisa a darle la noticia
Pues voy yo también a decírselo al rey.

ANEXO III

María del Cielo Moreno. Alumna curso 96/97. EU Magisterio Ciudad Real

Érase una vez un país muy lejano llamado **Globilandia.** Este nombre era debido a que todos sus habitantes eran globos de distintos colores, formas y tamaños. Todos vivían muy felices salvo tres que eran conocidos por sus continuas peleas.

Pero... ¿a que no podéis imaginaros el porqué de éstas? Aunque os parezca increíble era por su tamaño, ya que los tres eran del mismo color, azul, y forma, redonda, pero de diferentes tamaños:

Globuchón, era grande y juguetón, siempre estaba volando de un lado para otro y nunca se quedaba quieto.

Globomé, era mediano, más tranquilo que Globuchón, pero muy alegre.

Globito, era pequeño, simpático y muy divertido.

Pero si queréis conocerlos mejor escuchad atentamente una de sus tontas discusiones:

Globuchón: *"Amigos Globomé y Globito, observad cómo aquellas globas se fijan en mí; como soy más grande que vosotros brillo más y esto me hace más irresistible".*

Globomé: *"No seas tonto y creído, a quien miran es a mí; no soy grande ni pequeño, mi tamaño es el ideal".*

Globito: *"Vaya dos vanidosos, esas globas están pensando que como soy el más pequeño, soy el globo más salao que vuela por este cielo".*

Y mientras nuestros amiguitos seguían discutiendo, se oía a lo lejos la voz del Mensajero Real de Palacio que iba anunciando:

"Globos y globas de todo el país, los Reyes Globos celebrarán el próximo sábado la mayoría de edad de la ***Princesa Globa***, ofreciéndole como regalo un gran baile al que quedan todos invitados, con el fin de que ella consiga el mayor número posible de amigos. La fiesta tendrá lugar en Palacio".

Nuestros tres amigos se pusieron muy nerviosos ante tal acontecimiento y corrieron a sus casas para preparar sus trajes de gala.

Llegó el gran día y cada uno de los tres se arregló pensando que sólo él era el mejor: su belleza, única, y su tamaño, el perfecto, siendo éstas las razones por las que sólo él se ganaría la amistad de la Princesa.

¡¡Qué equivocados estaban nuestros amiguitos!!

Una vez en Palacio y comenzado el baile, los tres globos se peleaban por resaltar su aspecto ante la Princesa, pensando que su tamaño era lo más importante para impresionarla y así conseguir su amistad.

Pero entonces, la Princesita, que había observado el comportamiento de nuestros amiguitos, interrumpió el baile algo molesta, dirigiéndose a todos con estas palabras:

"Queridos invitados, no penséis nunca que por vuestro tamaño, color o forma, os cogeré como amigos, pues mi única intención es ser amiga de todos, pues *no importa cómo seáis por fuera, sino cómo sois por dentro*".

Y dicho esto, la Princesa Globa apagó su vela junto a todos sus nuevos amigos deseando felicidad y amistad para todos.

Así, nuestros amigos aprendieron la lección que les dio la Princesa, viviendo para siempre todos felices y sin volver a discutir nunca más por su tamaño, forma o color.

Y colorín colorado, todos amiguitos han acabado y nosotros el cuento hemos terminado.

DESDE LA EDUCACIÓN PRIMARIA A LA SECUNDARIA OBLIGATORIA: UN PUENTE PARA QUE NO NOS ARRASTRE LA CORRIENTE

Begoña Sánchez Laiseca

Para el profesorado, que se enfrenta a diario con un grupo de alumnos y alumnas para trabajar el área de Matemáticas, no resulta novedoso el problema que se plantea en el aula y que es extensivo a otras materias curriculares. Podríamos enmarcar la situación conflictiva a partir de las coordenadas de desmotivación en el alumnado y, muy a menudo, -¿cómo causa o cómo resultado?-, la diversidad en el nivel de conocimientos. La desmotivación y el bajo nivel de conocimientos, a medida que avanzamos hacia los cursos superiores de la Enseñanza Obligatoria donde aparecen con mayor claridad, se retroalimentan, llegando a instalarse como los habituales acompañantes del recorrido.

Intentar solucionar el problema mediante presupuestos e intenciones socio-educativas y no de *mera eficacia* para que no se nos presente en las aulas y deriven hacia otras instancias implica, creo yo, analizar e interpretar algunas causas y actuar sobre ellas. Retirando por un momento muchas variables -que sin duda intervienen- para centrarnos en el interior del proceso de enseñanza, didáctico y del sistema escolar, y de cada centro en el que se realiza.

Mientras no se analicen las causas inmediatas, concretas y cercanas de la desmotivación y del insuficiente nivel de conocimientos de la población escolar y no sean asumidas en cierta medida, como responsabilidad propia por el colectivo de profesionales que se dedican a la educación, se seguirá situando la problemática en el exterior de las aulas (sociedad, familia, administración, características individuales de los alumnos y alumnas). Esto supone una localización del problema en elementos externos y la *transparencia* de las actuaciones educativas que sin duda tienen un peso, no el peso, determinante. Sin ánimo de eliminar en otro lugar un análisis y las demandas correspondientes, que considero fundamentales, pero que no deben invadir un espacio educativo porque ocultan o desvirtúan un ámbito profesional que tiene compromisos ineludibles que le son propios.

Se trata de aprovechar, con estas Jornadas, la oportunidad de reflexionar sobre algunas tendencias de la educación matemática para enriquecer los conocimientos propios con las aportaciones de otros compañeros y compañeras que realizan experiencias innovadoras en un intento de coordinar los diferentes niveles educativos.

Esta ponencia tiene la intención de resaltar la importancia de crear un puente de comunicación entre las etapas. La necesaria coordinación en el paso de Educación Primaria a la

Educación Secundaria Obligatoria orientada por propuestas de renovación didáctica y metodológica, teniendo en cuenta lo que se hace y el cómo se hace.

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DEL PROFESORADO DE LAS DISTINTAS ETAPAS EDUCATIVAS

En la relación que mantengo con las distintas etapas de la Enseñanza Obligatoria se hace patente la necesidad de esa coordinación, sentida por la mayor parte de su profesorado aunque raras veces se manifiesta de manera explícita. La realidad es que no hay tradición asentada de coordinación entre etapas; los cauces establecidos son prácticamente inexistentes y en los casos en los que formalmente se hace algo, no satisface las expectativas y siempre supone un trabajo extra que no está contemplado, ni regulado, ni por supuesto remunerado.

La coordinación que se precisa no consiste en informar de la situación de los grupos de alumnos y alumnas en una sesión de final/principio de curso que es a todas luces insuficiente.

Se trataría de crear unos cauces de comunicación para incorporar características que sin duda definen las diferentes etapas, unas más orientadas a los aspectos pedagógicos y otras a los didácticos. Comunicación basada en la escucha, que consiste en valorar las aportaciones del interlocutor, considerar su capacidad para emitir y fundamentar sus aportaciones y en incorporar, en un intercambio y negociación constante, los aspectos que se vayan determinando como fundamentales. Algo que está muy alejado de ser la práctica de la sociedad en la que nos movemos, la que constituimos y en la que el sistema escolar podría erigirse en referencia de algunos modos alternativos de convivencia.

En primer lugar es preciso el análisis de la situación actual, en la que es habitual encontrarse con apreciaciones del profesorado de Educación Infantil en las que, en general, hay satisfacción por el trabajo realizado y por los resultados obtenidos. Desde esta etapa se prima en general, con las limitaciones que impone el simplificar, pero con la intención de aclararnos, la consideración *del sujeto* (que aprende) y a veces, también en general, pero mucho menos, la consideración de *qué aprende*. Lo curioso es que también desde fuera parece que los aprendizajes a esta edad son *menos importantes*, aunque se sepa que son el fundamento, y en cuanto a su cantidad y complejidad no van a repetirse en ninguna etapa del desarrollo humano posterior. Cuando los niños y niñas pasan de esta etapa a Primaria "se han cumplido los objetivos y los niños y niñas pasan motivados y preparados".

En Primaria las cosas ya no se ven desde los mismos presupuestos, aunque todavía no surgen las voces de alarma. Es una etapa realmente intermedia, a la que no puede otorgarse ese papel familiar tan poco gratificante *del hermano de en medio*: ni el mayor ni el pequeño y pasa desapercibido, luego así le van las cosas. En Primaria los niños y niñas adquieren la conciencia de su *valía académica*, alrededor de los siete a nueve años, que va a determinar en parte su motivación por el trabajo escolar. Si se consideran capaces ante las tareas que se les solicitan y éstas se presentan con un nivel adecuado para que les resulten significativas, tenemos posibilidades de encontrarnos ante una persona integrada en el sistema que no va a presentar graves problemas de aprendizaje.

En Primaria, también simplificando, el profesorado se divide hacia abajo y entonces se tienen en cuenta algunas orientaciones pedagógicas, aunque se vivan de modo un tanto culpabilizador por la presión a medida que se va pasando de curso. En el 3er ciclo hay una clara orientación hacia *arriba* y la preocupación fundamental son los presupuestos didácticos. Aún así, el profesorado de Educación Primaria también considera que se han cumplido los objetivos.

En Secundaria, los alumnos y alumnas no llegan preparados, ahora es imposible hacer más sobre todo porque ellos mismos no quieren...

El panorama es desolador.

UN MARCO PARA LA COORDINACIÓN ENTRE ETAPAS EDUCATIVAS

La coordinación entre etapas tiene que empezar por plantearse en común el análisis del propio recorrido. ¿Qué es lo que pasa?, ¿por qué pasa lo que pasa?, ¿los problemas surgen de manera espontánea o se gestan?, ¿tienen causas que controlamos, sobre las que podemos incidir para orientarlos?, ¿la acción humana no está orientada fundamentalmente a encontrar nuevos recursos ante las dificultades o se limita a definirlos?

Algo habrá que hacer mientras no se modifique la consideración de la coordinación entre etapas como una función recogida entre las tareas propias de la enseñanza; reconocimiento, espacio y tiempo y remuneración adecuada. Y esta puede ser una reivindicación importante a la hora de aportar soluciones para mejorar la calidad de la enseñanza.

A modo de orientación, y para empezar a actuar desde la situación actual, propongo una experiencia que para diversas áreas ha resultado muy gratificante y que se refiere a la organización de cursos formativos dirigidos a las distintas etapas, es decir, con planteamientos que tienen un amplio recorrido en vertical sobre las áreas curriculares. En las sesiones correspondientes hay un lugar y un tiempo de encuentro, es posible conocer procesos que la experiencia concreta limita, se amplía la visión panorámica de problemas que puntualmente no tienen fácil tratamiento y surgen posibilidades de tratar la diversidad en el aula porque se entienden los pasos anteriores que no hayan sido superados.

Además, y esto permite pasar al segundo aspecto de reflexión, en los cursos de formación es posible conocer nuevas orientaciones y modelos didácticos, en relación con la incorporación de nuevos conocimientos sobre los procesos de aprendizaje a los que tiene que adecuarse la enseñanza (o no), ya que esto es un posicionamiento muy determinado.

Conocer, comprender y enriquecerse con las aportaciones de la psicología evolutiva o del aprendizaje, exigen una actitud personal que posibilite la disposición a aprender, entendiendo esto como la modificación y reestructuración de los esquemas previos. Para explicar y valorar esa actitud, que profesionalmente a menudo exige un acto heroico sirve esta frase de Ziman[1]: "El científico encuentra dificultades al enfrentarse a la posibilidad de que

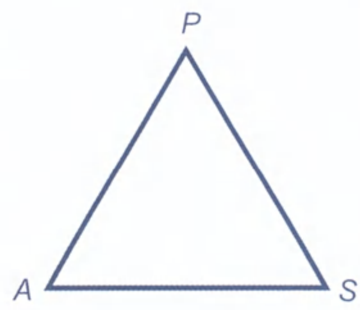
[1] Ziman, J. M. (1985): *Enseñanza y aprendizaje sobre la ciencia y la sociedad.* México, Fondo de Cultura Económica.

su representación del mundo sea errónea". El profesor o profesora tiene, en función de su preparación y experiencia, de su capacidad de analizar críticamente su propia actuación y de su preocupación por *estar al día*, una determinada concepción de cómo se aprende (o de cómo algunos no aprenden) y de cómo se enseña (qué es lo que se ha hecho toda la vida, por ejemplo, a nosotros...).

Hablábamos de la situación heroica de estar dispuestos a modificar la propia representación del hecho de enseñar y por eso hay que descubrir nuevas formas para que no se pierdan tantos cerebros en potencia como se pierden (no sabemos cuántos se pierden porque no lo podemos comprobar, pensar en esa hipótesis resulta conmovedor, pero hay que intentar que sean los menos posibles).

Hay dos modelos fundamentales que explican el hecho del aprendizaje humano y que se pueden analizar a partir de la representación de una *situación didáctica* y de los elementos que la configuran: un experto que se encuentra con un novato respecto a un saber (en este caso matemático). Los modelos se explican desde el sentido que se otorgue a cada uno de estos elementos y a la relación que establecen entre ellos.

La situación queda representada en la figura siguiente:



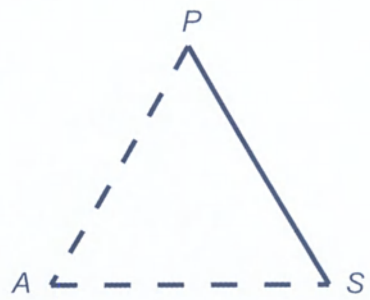
en donde *P* representa al experto, al profesor o profesora, conocedor del conocimiento. El conocimiento es *S*, el saber, y *A* es el alumno o la alumna.

MODELOS *DE ABSORCIÓN*

Son todos los que subrayan la importancia de la enseñanza, y consideran el papel que desempeña el novato en función de aquella. El alumno y la alumna aprenden como reacción y respuesta a lo que se les propone en la enseñanza.

En este modelo se subraya la relación del experto, profesor, con el saber, en este caso el saber matemático. Las Matemáticas son un sistema del que se consideran sus secuencias lógicas, que se pormenorizan como recurso que facilite su enseñanza para poder ser asimilado por el novato; cuantas más dificultades muestre el novato, se intentaría subdividir los pasos determinados de las secuencias. La propuesta es sobre todo descriptiva, tanto de los conceptos como de las estrategias y de los procedimientos. Se orienta y valora el reconocimiento y la aplicación de fórmulas algorítmicas. El profesor intenta controlar el programa y las propuestas.

Este modelo se representa en la siguiente figura; el papel que desempeña el novato está un tanto difuso, es sobre todo reactivo. Se expresa como una *tabla rasa* sobre la que se escriben los conocimientos.



Es el modelo tradicional, aunque haya evolucionado mucho en cuanto a la presentación de los contenidos a través de tareas, que ponen en juego una cierta actividad en los alumnos y alumnas, para facilitar el aprendizaje. Pero sigue primando la conceptualización que origina la suplantación de los procesos mentales que tiene que poner en marcha el aprendiz.

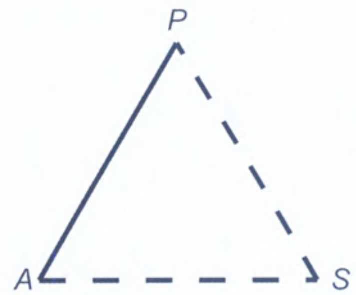
Es el modelo que difícilmente logramos superar, porque es como nosotros hemos aprendido y a través del que hemos desarrollado nuestra práctica, cuando hay experiencia.

La psicología del aprendizaje aporta un nuevo modelo que determina que se aprende a través de la experiencia personal superando procesos de construcción, en los que el novato es sujeto de su propio aprendizaje; son los modelos *constructivistas.*

MODELOS DE CONSTRUCCIÓN

Entre ellos se distinguen dos orientaciones. El constructivismo *ingenuo,* basado en las pedagogías psicologistas en las que se defiende y potencia la exploración libre.

Es una reacción opuesta al modelo anterior; aquí todo lo que haga el alumno en su exploración, vale. Se teme la intervención y sus consecuencias que impiden el desarrollo de los procesos *naturales* de aprendizaje. Se potencia la exploración libre en situaciones significativas para el niño y la niña.

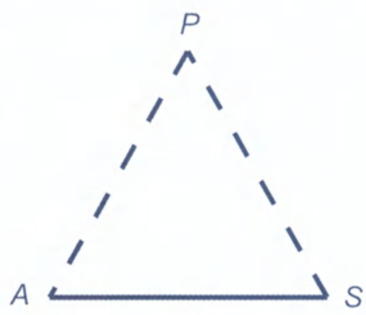


Este modelo ha dañado, en primer lugar, al alumno y alumna menos dotados por causas tanto individuales como sociales o familiares; y, por otro, a un tipo de profesorado que ha interpretado que las nuevas orientaciones de la enseñanza consistían en enseñar (lo menos posible) porque ya aprendían los niños y las niñas solos, ya que los procesos de aprendizaje son naturales y no culturales.

En este modelo queda difuminado el saber, que aparece como una consecuencia; lo que importa es el respeto a los procesos madurativos de los niños y niñas.

CONSTRUCTIVISMO

Como superación del modelo anterior, surgen propuestas que valoran la intervención del experto, cuya tarea se dirige a poner en relación de forma sistemática al alumno y alumna con el saber. El profesor es un mediador que potencia la experiencia del novato y la orienta desde el conocimiento y la lógica de la materia que enseña.



Interesa, desde este modelo, reflexionar sobre la interpretación que se otorga al saber matemático y la interpretación del sujeto que aprende.

El saber matemático

Se interpreta que los conocimientos del saber matemático que hoy forman parte del currículo escolar, se gestaron a través del tiempo para solucionar necesidades reales que justificaron su planteamiento y desarrollo. Estos conocimientos son el resultado de la superación de unos o la eliminación de otros y siempre el enriquecimiento de los iniciales. En la actualidad hay que tener en cuenta los largos procesos que los fueron haciendo posibles y considerarlos como las verdades a las que ha llegado la humanidad, pero no como inmutables.

El proceso seguido por la ciencia, en cuanto a la significación de la búsqueda de las soluciones ante los problemas, es similar al proceso que siguen los alumnos y alumnas en sus aprendizajes y es importante permitir y potenciar experiencias en las que se impliquen de forma que puedan dar sentido a lo que se les plantea que aprendan.

Se trata de presentar, por lo tanto, los contenidos a través de situaciones problemáticas y significativas para que el alumno y alumna las solucione a través de estrategias específicas. Las estrategias no se describen, ni se detallan para controlar desde el saber el curso de la acción del novato, sino que se potencia la puesta en marcha de los recorridos que el alumno y la alumna van *sospechando* como los más adecuados hasta que se consigue su aprendizaje. Son tomas de decisión en función de objetivos que se proponen al iniciar la actividad y que guían los propios procesos.

El planteamiento de los problemas en la clase de Matemáticas puede estar orientado a trabajarlos como ejercitación, en cuanto a la aplicación de fórmulas algorítmicas, y originado en el deseo del adulto de comprobar si el alumno y la alumna son capaces de la repetición de lo enseñado. De esta forma, lo que realmente se aprende es a obedecer consignas y en este caso no se respetarían los presupuestos del modelo constructivo.

La alternativa, por el contrario, se genera al concebir el planteamiento y solución de problemas ante situaciones vivenciales y significativas: un reto para el pensamiento que se pone en marcha a través de las estrategias que plantea, en el sentido de *"resolver un problema es lo que haces cuando no sabes lo que hay que hacer"*.[2]

En este mismo sentido, las diferentes posibilidades de muy diversos juegos estarían incluidas como situaciones problemáticas que hay que solucionar; aquí el problema es conseguir ganar.

Sin ánimo de entrar a valorar las excelencias del juego y las posibilidades que brinda en cuanto al aprendizaje de estrategias lógico-matemáticas, es preciso por lo menos citar la conveniencia y oportunidad de incluir juegos en el aula.

Los juegos suelen resultar significativos, interesan y son funcionales. Son motivadores y orientan la atención hacia el propio juego y no tanto hacia la capacidad personal, que puede crear ansiedad y restar posibilidades de actuación. Todos los juegos tienen normas y este es un aprendizaje añadido: jugar es respetarlas. En el juego se comprueba la diferencia entre las consecuencias de las actuaciones que pueden modificar su curso y el azar. El juego obliga a ceñirse a sus características, posibilidades y limitaciones, y se aprende la diferencia entre jugar y jugar bien.

Es preciso el afianzamiento de modelos que orienten la práctica en el aula para aprender a pensar, ya que no quedan muchos lugares para hacerlo. A través de un trabajo de este estilo se podría esperar una interpretación y una expresión de la realidad cotidiana más ajustada; el hábito de analizar las características de las situaciones y sus retos; los cálculos espontáneos en la resolución de problemas vivenciales, porque en Matemáticas hay que aprender a solucionar el problema más cercano de todos: el del sentido y definición de la propia vida.

Las actividades se deben realizar en grupos o talleres para hacer posible la interacción entre iguales y con el profesor/a, diferenciando entre las actividades para aprender -en las que es necesario el planteamiento de dudas, el debate, cuestionarse las propias actuaciones y alcanzar y negociar los acuerdos implicados- de las actividades de ejercitación, que son necesarias para agilizar la utilización y desarrollo de algoritmos y del cálculo; y por último, las actividades de evaluación en las que se comprueba si se han conseguido dichos aprendizajes.

[2] Definición acuñada por la pedagoga americana M. J. Wheatley.

La interpretación del sujeto que aprende y el desarrollo de la identidad personal

El sujeto cognitivo que aprende y que lo hace:

- Para solucionar necesidades y superar problemas.
- En la medida que identifica lo que se le ofrece con alguna necesidad funcional.
- Haciéndose alguna pregunta antes de recibir respuestas.
- Elaborando hipótesis y poniendo en marcha estrategias a partir de lo que sí conoce.
- Validando hipótesis y ampliando las estrategias.

Desarrollo de la identidad personal: el sujeto emocional que aprende

- precisa de una cierta dosis de *seguridad académica* basada en la motivación, al sentirse capaz de realizar la tarea de aprender (y no de saber antes de haber aprendido).
- sería capaz de realizar los esfuerzos que precisa el aprendizaje en la medida que sean significativos, le resulten funcionales y le produzcan una dosis de gratificación.

Merece la pena plantearse la incorporación en las programaciones y metodología de las Matemáticas alguna de las propuestas esbozadas para poder ofrecerles:

- Un instrumento de análisis (¿e implicación sobre la realidad?) que otorgue un sentido racional.
- El desarrollo del pensamiento científico para enfrentarse a lo que les rodea.
- Otorgar la importancia a los datos que sean verificables y a las hipótesis que pueden someterse a las pruebas rigurosas de las Matemáticas.
- Desarrollar el sentido crítico que duda y se plantea cuestiones en lugar del acatamiento del saber.
- La conciencia de la repercusión del desarrollo científico y tecnológico en las creencias y en los sentimientos humanos para poder buscar y elegir espacios personales en los que defenderse.

Y para trabajar los valores de:

- La curiosidad, que no solo se cuestiona el qué y el cómo sino especialmente el ¿por qué?
- El sentido crítico y la integridad que lleva al compromiso con lo criticado.
- Las dudas que acercan a la imparcialidad y a la tolerancia.
- La imaginación ante el reto de llevar a cabo nuevas soluciones que posibilita la apertura a nuevas ideas.

PARA TERMINAR

Para terminar me gustaría hacer una referencia a:

La tradición oral

Algo que recordar para evitar *"La insoportable levedad del ser"*[3]:

"El 1 es un soldado, creo que haciendo la instrucción... y luego los metemos en una caja y los atamos..."

Si este es el inicio de la historia, ¿podrá tener un buen final?

Un pensador actual

Algo que recordar para animar a pensar y a descubrir con el saber matemático:

"Lo que llamamos azar es la ignorancia de la compleja maquinaria de la causalidad"[4]

Un clásico de lógica ¿infantil?

Para definir con claridad ¿qué es lo que queremos conseguir?

Alicia[5] le preguntó al gato:

"Por favor ¿podrías decirme por dónde tengo que ir?".

"Eso depende de adónde quieras ir", le respondió el gato.

"No me importa adónde", dijo Alicia.

"Entonces da igual el camino que elijas", aclaró el gato.

Me gustaría haber contribuido a señalar que posiblemente la calidad educativa no es tanto lo que se aprende sino cómo se aprende, lo que se aprende para poder utilizarlo y cómo se utiliza. Y también que el éxito en educación depende de muchos factores y variables, pero de entre todos ellos no son los procesos de aprendizaje de los alumnos y sus dificultades los más importantes y fundamentales, y que podemos poner nuestra atención en los conocimientos que tenemos de cómo se aprende para seguir aprendiendo al enseñarlo.

---

[3] Kundera, M. (1985): *La insoportable levedad del ser.* Barcelona, Tusquets.

[4] Borges, J. L. (1980): *Siete noches*. Madrid, Alianza.

[5] Carrol, L. (1865): *Alicia en el País de las Maravillas.* Madrid, Alianza, 1970.

MATEMÁTICAS Y MAGIA

José Muñoz Santonja
IES Macarena, Sevilla

Juan Antonio Hans Martín
CC Santa Mª de los Reyes, Sevilla

Antonio Fernández-Aliseda Redondo
IES Camas, Sevilla

LA ÍNTIMA RELACIÓN ENTRE LA MAGIA Y LAS MATEMÁTICAS

Las Matemáticas tienen algo de mágicas.

La afirmación anterior puede parecer algo extraña, pero tiene su fundamento. Hay muchos alumnos que después de haberse peleado con un problema sin saber cómo hincarle el diente, han observado asombrados que el profesor desarrolla sin la más mínima equivocación un entramado de planteamientos, considerandos, operaciones e implicaciones lógicas, que permiten llegar a la, en apariencia, inalcanzable solución. Después de una demostración de este tipo, el alumno queda convencido de que la resolución de ese problema ha llegado a buen fin prácticamente debido a la magia.

La idea recíproca a la anterior, que la magia tiene algo de Matemáticas, también es cierta en muchos casos. Existen multitud de trucos, entre los que se cuentan los de dados, bastantes de cartas y, evidentemente, muchos de adivinación de cantidades (sean edades, números pensados, fechas de nacimiento, cantidad de hermanos, etc.) cuyo fundamento es matemático.

En este ponencia queremos presentar algunos de esos trucos en cuya explicación aparecen las Matemáticas. Su interés para nosotros no es meramente asombrar a nuestros alumnos, e hipnotizarlos con la demostración de nuestros poderosos recursos mágicos, sino aprovechar esas propiedades matemáticas para que los alumnos las estudien y hagan Matemáticas investigando su explicación, incluso hechos a su medida. La mayoría de los trucos que vamos a ver favorecen acciones y procedimientos que hay que fortalecer en nuestra materia; por ejemplo, el cálculo mental o la necesidad de ser sistemáticos a la hora de estudiar todas las posibilidades que tengamos en una determinada situación.

Indudablemente, la puesta en escena a la hora de presentar los trucos es importante para atraer la atención de los alumnos y motivarlos. Dotar a los trucos de un halo de misterio, incluso crear la sensación de que se está entrando en un reducido mundo de personas con mágicos conocimientos, puede hacer que los alumnos se entusiasmen y se vuelquen en el trabajo de investigación. Que esa puesta en escena resulte más o menos atractiva dependerá de la propia personalidad de quien presente los trucos, y de su capacidad para *actuar* como mago.

A la hora de elegir los trucos hemos pensado en aquellos que no necesitan mucho material especial. Es decir, trucos donde se utilizan elementos fácilmente localizables en cualquier casa.

TRUCOS CON DADOS

Los trucos más simples son aquellos en los que se utilizan dados cúbicos normales con los números del 1 al 6, es decir, los mismos que se emplean en los juegos tradicionales que hay en muchas casas (parchís, oca, etc.).

Los dados tienen la ventaja de que están formados por los seis primeros números naturales, y eso permite realizar fáciles operaciones con ellos. Además, la distribución de los números en sus caras favorece muchos trucos, como vamos a ver a continuación.

Puesto que la explicación de los dos primeros trucos se basa en la misma propiedad, vamos a ver primero cómo se presentan y se realizan, y después veremos su fundamento matemático.

El lanzamiento de tres dados

Se utilizan tres dados que se entregan al voluntario que se haya prestado a ayudarnos. El mago, de espaldas al ayudante, le va dando las siguientes instrucciones:

a) Lanza los tres dados.

b) Suma los números que aparecen en las caras superiores de los tres dados.

c) Toma ahora uno cualquiera de los dados y añade a la suma anterior, el valor de la cara sobre la que estaba apoyado ese dado.

d) A continuación, vuelve a lanzar el dado que has cogido y añade a todo lo anterior, el valor del número que sale en la cara superior.

e) De nuevo elige otro dado, puede ser el mismo de antes u otro distinto, y suma la cara sobre la que se apoyaba.

f) Vuelve a lanzar el último dado que has cogido, y aumenta la suma anterior con el valor que salga en la cara superior.

A continuación, el mago se acerca al voluntario. Tras dejar claro al público que éste ha tenido que sumar siete números, y que para el mago es imposible saber cuáles han sido los dados que ha elegido para volverlos a lanzar, inmediatamente indica cuál es la suma.

La forma de adivinar esa suma es muy fácil; el mago sólo tiene que fijarse en cuánto suman las tres caras de los dados que están en ese momento a la vista, y a esa cantidad sumarle 14.

Este truco puede hacerse también realizando sólo los cuatro primeros pasos. Es decir, sin tomar el segundo dado para ver la cara base, y volverlo a tirar. En ese caso, lo que hay que añadir a la suma de las caras superiores expuestas es sólo 7. De todos modos, realizar dos veces la elección de un dado favorece que se enmascare más fácilmente el truco, y que el público quede convencido de que el mago no puede saber cuáles han sido los números que han salido en todo el proceso.

La columna de dados

Vamos a explicar el truco siguiente utilizando tres dados, pero si se quiere se pueden utilizar cuatro (más no suelen aportar ninguna ventaja).

Sin mirar lo que hace el voluntario, el mago le pide que construya una torre con los tres dados, colocando un dado sobre otro.

A continuación, le indica que sume las caras que están ocultas, es decir, la de unión del primer dado con la mesa, las caras de unión entre el primer dado y el segundo y, por último, las caras de unión entre el segundo y el tercer dado.

Una vez hecho esto, el mago pide que escriba el resultado en un papel y se lo guarde. Seguidamente, el mago se acerca al voluntario e inmediatamente le indica cuál es el resultado de la suma; lo que puede comprobarse con el número anotado en el papel.

Este truco es también muy fácil de realizar, pues lo único que tiene que hacer la persona que realiza el truco es fijarse en cuál es la cara superior del dado que queda encima de la pila, y esa cantidad restársela a 21 (si se utilizan cuatro dados hay que restarle la cantidad a 28).

Justificación matemática de los trucos de dados

La base matemática en la que se apoyan los dos trucos anteriores es la misma. En los dados normales que se encuentran comercializados, hay una propiedad que siempre se cumple. La suma de las caras opuestas de un dado es 7.

Por esta razón, en el primer truco sólo hay que sumar 7 por cada uno de los dados en que se haya sumado la cara superior y la cara sobre la que se apoyaba. Así, si lo hacemos con un dado, aunque nosotros no hayamos visto ni la cara superior ni la inferior, sabemos que su suma es 7, que es lo que añadiremos a la suma de caras que está a la vista. Si hay dos dados a los que sumamos la parte inferior y volvemos a tirar, habrá que sumar 14, y así sucesivamente.

El segundo truco es aún más fácil. Las caras sobre las que se construye la columna de dados suman 7, por la cantidad de dados que haya apilados (si son tres en total, 21), luego sólo hay que restar la cara que está a la vista para saber la suma de las que están ocultas.

TRUCOS CON NÚMEROS

Este tipo de truco es muy numeroso y, posiblemente, de los más atractivos desde el punto de vista educativo; aunque hay que tener en cuenta que cuando se utilizan elementos diferentes de los dados, por ejemplo cartas como veremos más adelante, también estamos haciendo juegos numéricos, pues al fin y al cabo lo que hacemos es jugar con los valores que aparecen en esos elementos. Como ejemplo, vamos a empezar utilizando dados, aunque se puede realizar directamente con valores elegidos al azar (que es simplemente lo que ocurre al lanzar los dados) o por voluntarios.

Adivinar el resultado de tres dados

Un voluntario lanza los tres dados y el mago, sin mirar lo que ha salido, le pide que realice las siguientes operaciones:

a) Toma el valor del primer dado y súmale 3.

b) Duplica el valor de la suma.

c) Añádele 2 al resultado obtenido y multiplica la suma por 5.

d) Al valor que tienes, súmale lo que haya salido en el segundo dado más 1.

e) Lo que resulta lo multiplicas por 5.

f) A continuación añades 2 y multiplica todo el resultado por 2.

g) Por último, añade 3 y el valor del tercer dado.

Si a continuación el voluntario le dice cuál es el valor que ha obtenido, el mago le indica rápidamente qué ha salido en cada uno de los dados.

El truco para adivinar los resultados, consiste en que el mago reste del valor que le ha dicho el ayudante la cantidad de 417, con lo que obtendrá un número de tres cifras, cada una de ellas es el valor obtenido en cada uno de los dados.

Este truco puede hacerse con calculadora para que el voluntario realice los cálculos que se le van pidiendo, aunque hay que asegurarse de que las operaciones se realizan en el orden indicado. Por tanto, si la calculadora es científica, (aplica la jerarquía de operaciones), debe pulsarse el signo igual después de cada operación.

Como ya hemos dicho, este mismo truco puede hacerse sin necesidad de dados. Bastaría adivinar tres cantidades elegidas por tres personas del público, con la única restricción de que esos valores deben ser menores de 10. El proceso sería el mismo y el número clave a restar también. Nosotros hemos utilizado muchas veces el mismo truco para adivinar la cantidad de hermanos de tres voluntarios del público, aunque hay que procurar que ninguno sea de familia muy numerosa, pues en una ocasión tuvimos a alguien que eran diez hermanos en su casa y nos desbarató el truco.

Justificación matemática

Igual que todos los trucos que se basan en la adivinación de números pensados por el público y sometidos a ciertas operaciones, éste tiene su fundamento en el Álgebra. Una mera expresión algebraica nos indica cuál es el número que tenemos que restar para obtener los valores pensados.

A continuación, reconstruimos cómo lo haríamos en nuestro caso. Llamaremos a, b y c a los valores que nos han salido en los dados, y vamos a seguir las operaciones que debemos realizar, escribiendo el lenguaje coloquial junto al lenguaje algebraico correspondiente.

Lenguaje coloquial	**Lenguaje algebraico**
Toma el valor del primer dado y súmale 3.	$a + 3$
Duplica el valor de la suma.	$(a + 3)\,2 = 2a + 6$
Añádele 2 al resultado obtenido y multiplica la suma por 5.	$(2a + 6 + 2)\,5 = 10a + 40$
Al valor que tienes, le sumas lo obtenido en el segundo dado, más 1.	$10a + 40 + b + 1$
Lo que resulta lo multiplicas por 5.	$(10a + b + 41)\,5 = 50a + 5b + 205$
A continuación, añade 2 y multiplica todo el resultado por 2.	$(50a + 5b + 205 + 2)\,2 = 100a + 10b + 414$
Por último, añade 3 y el valor del tercer dado.	$(100a + 10b + 414) + 3 + c =$ $100a + 10b + c + 417$

Como puede apreciarse, al final quedan los tres valores a, b y c multiplicados por 100, 10 y 1 respectivamente, más un número clave que sirve para enmascarar el resultado y hacer que quien nos dé el resultado, no sepa que nos está dando la solución ordenada. En nuestro caso el número es 417, por lo que si restamos esa cantidad a lo que nos dicen, obtenemos $100a + 10b + c$, es decir, un número de tres cifras *abc* que indica los valores obtenidos en los dados.

Una vez que hemos visto el proceso, podemos inventarnos nuestras propias operaciones. Es posible sumar o restar en cada momento los valores que se quieran; únicamente tenemos que mantener que a lo largo de todas las operaciones el primer número termine multiplicado por 100, el segundo por 10 y el tercero no se multiplique por nada. Siguiendo un razonamiento parecido al anterior, podemos deducir cuál debe ser el número clave que hay que restar al resultado. Este número también suele recibir el nombre de *velo*, pues tapa cuál es el valor final que nos dan.

Adivinar un número

Del estilo al anterior son todos los juegos de magia que se engloban en los bloques de pensar un número, con el que se realizan algunas operaciones, dando el resultado final para que lo adivine el mago. También su explicación se basa en el Álgebra y en escribir la expresión algebraica correspondiente a todas los pasos. Vamos a ver uno de ellos.

El mago pide a alguien del público que piense un número cualquiera, y realice las siguientes operaciones:

1) Añádele 11 al número que has pensado.

2) El resultado anterior lo multiplicas por 3.

3) Súmale ahora 15 a lo obtenido anteriormente.

4) A lo que te da, le restas el número que habías pensado.
5) Divide lo que obtienes por 2.
6) Por último, réstale 5.

Tras dar el resultado, el mago descubre inmediatamente el suyo, que es el mismo.

Vamos a realizar un proceso como el anterior, para descubrir qué es lo que hemos estado haciendo con las operaciones. Llamemos x al número buscado.

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
Añádele 11 al número pensado.	$x + 11$
Lo anterior lo multiplicas por 3.	$(x + 11)\ 3 = 3x + 33$
Súmale ahora 15 a lo obtenido.	$3x + 33 + 15 = 3x + 48$
A lo que te da, le restas el número que habías pensado.	$(3x + 48) - x = 2x + 48$
Divide lo que obtienes por 2.	$(2x + 48) / 2 = x + 24$
Por último, réstale 5.	$x + 24 - 5 = x + 19$

Como se ve, el resultado que nos dicen, es el número pensado más 19, por lo que lo único que tenemos que hacer para obtener el número, es restar esa cantidad al valor que nos indican.

La Memoria Prodigiosa

Un truco que suele ser muy atractivo es el de la *"Memoria Prodigiosa"*, en el que el mago descubre rápidamente un número tapado en una gran lista de valores. En él se utiliza el siguiente cuadro:

35	23	80	32	17	46	44	34
22	41	20	81	68	56	61	78
16	59	77	63	50	11	79	75
62	13	37	82	58	57	10	39
9	38	36	26	27	15	72	24
60	48	53	70	14	33	12	73
42	3	71	67	8	51	69	55
50	49	2	31	54	5	29	74
19	7	64	16	1	30	28	18
6	25	4	65	52	40	45	62

Lo primero que debe hace el mago es presentar el cuadro, y llamar la atención sobre que es un cuadro desordenado donde hay ochenta números, en los que faltan algunos, pues aparecen el 81 y el 82, e incluso los hay repetidos como el 16 o el 50. Sin embargo, el mago tiene una memoria tan prodigiosa, que sabe qué números son los que están, y además en qué lugar se encuentran.

Para demostrarlo, el mago saca un voluntario y, manteniéndose de espaldas al cuadro, le pide que tape uno cualquiera de los números. El mago se vuelve e inmediatamente dice cuál es el número escondido.

Como es normal, el truco no consiste en saberse el cuadro de memoria. Aunque a simple vista pueda parecer que los números están desordenados, la verdad es que están colocados según una regla, que es la que el mago debe recordar.

Si se elige un número cualquiera, lo único que hay que hacer es moverse en diagonal, hacia arriba o hacia abajo un total de cuatro casillas. Si nos fijamos en el número que aparece en la cuarta casilla (contando a partir de la que contiene el número tachado) sólo hay que sumarle 8, si nos hemos movido en diagonal hacia abajo, o restarle 8, si nos hemos desplazado hacia arriba, y nos dará el número buscado.

Veamos un par de ejemplos sobre el propio cuadro.

Tapamos el valor que está en la tercera columna y séptima fila (el número 71), e intentamos contar cuatro casillas en diagonal. En este caso sólo podemos movernos hacia arriba y llegamos al número que está en la casilla de la séptima columna y tercera fila, es decir, al 79. Como hemos contado hacia arriba le restamos 8, con lo que damos con el número $79 - 8 = 71$. Si elegimos ahora la segunda fila y quinta columna, sólo podemos contar en diagonal hacia abajo, llegando a la sexta fila y primera columna, es decir, al número 60, que al sumarle 8 (porque hemos bajado) nos da el número inicial $60 + 8 = 68$.

A veces hay números en los que se puede tanto subir como bajar, en ambos casos debe dar lo mismo. Si, por ejemplo, tomamos la casilla 6,6 (fila sexta y columna sexta), y nos movemos hacia arriba llegamos a la casilla 2,2 (fila segunda y segunda columna) donde está el número 41, como hemos subido restamos 8, $41 - 8 = 33$. Si por el contrario hubiésemos bajado, habríamos llegado a la casilla 10,2 (fila décima y columna segunda) que tiene el número 25 y dado que hemos bajado nos quedaría $25 + 8 = 33$.

Igual que en los trucos que hemos visto en este mismo apartado, cada uno puede construirse un cuadro a su gusto. Basta diseñarlo con la cantidad de columnas y filas que se quiera, y decidir cuántas casillas en diagonal se van a contar y qué número se va a añadir o restar en cada caso.

Es una buena actividad de repaso de operaciones de suma y resta, el que a los alumnos se les pida, una vez que hayan practicado el truco, que se construyan un nuevo cuadro. Por ejemplo de ocho filas y seis columnas. A partir de una casilla deben contar en diagonal tres lugares y al número anterior sumarle cuatro si han subido, o restarle cuatro si han bajado. Y pedirle que pongan los números que quieran para comenzar, aunque nunca menores de 4 en las cinco primeras filas.

El cuadro se puede hacer de las dimensiones que se quiera, pero nunca es conveniente que tenga el triple o más de filas que el de casillas que hay que contar. El número de columnas siempre debe ser como máximo dos unidades menos que el doble de casillas que se cuenta, pues si no, se repiten los números en la misma línea y puede llegar a descubrirse el truco.

El siempre fiable 1089

Hay juegos de magia matemática que pueden repetirse varias veces, sin que el público descubra el truco que se está empleando. Un ejemplo evidente es el truco anterior. Es posible adivinar varios números que se tachan en distintas ocasiones, sin que los que ven realizar el prodigio sean capaces de darse cuenta de en qué consiste la regla que está aplicando el mago.

Hay sin embargo otros que sólo pueden realizarse una vez, pues el resultado es siempre el mismo, ya que se basan en propiedades concretas de las operaciones que se realizan. El ejemplo más evidente de estos casos es el que presentamos a continuación.

El mago le pide al voluntario del público que piense un número de tres cifras, entonces utiliza sus *poderes* mágicos para adivinar el resultado que va a obtenerse al realizar una serie de operaciones. Los pasos que debe realizar el voluntario son los siguientes:

a) Pensar un número de tres cifras que no sean iguales.
b) Debe cambiar la primera y la tercera cifra entre sí.
c) Al mayor de los dos números que tiene ha de restarle el menor.
d) Al número obtenido en la diferencia vuelve a cambiarle la primera y la tercera cifra.
e) Ahora suma el número obtenido en la diferencia con el obtenido al cambiar su primera y tercera cifra.
f) Por último, el ayudante indica el resultado de la suma, que coincide exactamente con el número escrito por el mago en el papel.

La verdad es que aquí no hay ningún problema en adivinar el resultado final, pues independientemente del número elegido, al final de esos pasos siempre se obtendrá el valor 1089.

Vamos a verlo con un ejemplo concreto. Elijamos el número 496. Realizamos las operaciones indicadas:

$$\begin{array}{r} 694 \\ -\,496 \\ \hline 198 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 198 \\ +\,891 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Una vez que se haya realizado el ejemplo elegido, se pide a los alumnos que comprueben que ocurre siempre igual, sea cual sea el número del que partimos al realizar las operaciones.

Si se quiere dejar boquiabierto al público en la presentación del truco, puede utilizarse una guía de teléfonos y, cuando la persona elegida piense el número, escribir en una tarjeta el nombre de un abonado, su dirección y número de teléfono. Una vez que la persona realice las operaciones, se le pide que busque en la página correspondiente a las tres primeras cifras del resultado y dentro de ellas elija al abonado correspondiente a la última cifra, que será precisamente aquel del que ha escrito sus datos el mago que, naturalmente, se habrá aprendido antes de comenzar la sesión de magia. También puede realizarse el truco con un libro, donde deberá buscar la página correspondiente a las dos primeras cifras, siempre la 10, y elegir de la línea correspondiente a la siguiente cifra, la línea 8, la palabra cuya posición coincide con la última cifra, que será la novena palabra, previamente aprendida por el mago y escrita en un papel.

Adivinar la cifra tachada

Hay una gran variedad de trucos numéricos que se basan en la divisibilidad por el número 9. Veamos uno de ellos.

El mago pide a alguien del público que realice los siguientes pasos:

a) Piense un número de varias cifras (por ejemplo, de cuatro).
b) A continuación sume todas las cifras y al número pensado le reste el valor de esa suma.
c) Después tache una cifra cualquiera del resultado de esa diferencia, que sea distinta de 0.
d) Por último, debe decirle al mago las cifras que han quedado sin tachar en el orden que él quiera.

Una vez que haya acabado de decirle las cifras al mago, este adivinará inmediatamente cuál era la cifra tachada.

El truco se basa en que si a un número cualquiera le restamos la suma de sus cifras, el resultado obtenido es un múltiplo de 9; por lo tanto, si sumamos sus cifras debe dar un múltiplo de 9. Lo único que debe hacer el mago es sumar las cifras cuando el voluntario las vaya indicando y al final calcular qué número falta para el siguiente múltiplo de 9. Ese número que falta coincide con la cifra tachada.

Veamos un ejemplo. Elegimos el número 3279 cuyas cifras suman $3 + 2 + 7 + 9 = 21$. Al realizar la resta se obtiene $3279 - 21 = 3258$. Si ahora tachamos la cifra 5, nos quedan las cifras $3 + 2 + 8 = 13$ y como el siguiente múltiplo de 9 es el 18, quiere decir que hemos tachado la cifra $18 - 13 = 5$.

Como puede darse el caso de que al sumar las cifras saliese un múltiplo de 9, entonces habría dos posibilidades: que la cifra tachada fuera 9 o 0; para no tener problemas es por lo que se exige que la cifra tachada sea distinta de 0. Por tanto, si nos encontramos en ese caso, es seguro que se ha eliminado la cifra 9 del número obtenido al restar.

Los alumnos de Secundaria pueden intentar demostrar por qué razón siempre se obtiene un múltiplo de 9, si restamos a un número la suma de sus cifras.

Si los alumnos tienen claro el sistema de numeración posicional, saben que en el número *abcd,* la cifra *a* representa las unidades de millar, la *b* la de las centenas, la *c* las decenas y la *d* las unidades; por ello ese número puede presentarse como:

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$

si a eso le restamos la suma de las cifras, obtenemos:

$$abcd - (a + b + c + d) = 1000a + 100b + 10c + d - a - b - c - d =$$
$$= 999a + 99b + 9c = 9\,(111a + 11b + c)$$

con lo que se ve claramente que el resultado siempre es múltiplo de 9.

Este truco puede realizarse de otra manera, incorporando a más personas, y así se enmascara aún mejor lo que realiza el mago. Los pasos que hay que seguir serían:

a) Una persona elige un número de varias cifras y lo escribe en un papel.
b) Ese papel se lo pasa a otra persona, que ordena las cifras del número que recibe en el orden que él quiera (debe usar exactamente las mismas cifras).
c) A continuación, resta del mayor de los dos números que tiene, el menor. El resultado de la diferencia lo escribe en otro papel.
d) Este nuevo papel se entrega a una tercera persona, que deberá tachar una cifra distinta de cero. Al decir las cifras que quedan, en el orden que la persona del público elija, el mago puede adivinar la cifra tachada.

De nuevo tenemos el mismo fundamento que antes. Si tomamos un número al azar, reordenamos sus cifras como queramos, y restamos los dos números, lo obtenido es siempre múltiplo de nueve.

Veamos un ejemplo cualquiera. Sea el número 183662, lo reordenamos como 632681 y restamos $632681 - 183662 = 449019$ cuyas cifras suman $4 + 4 + 9 + 0 + 1 + 9 = 27$ que es múltiplo de 9.

Dejamos a la elección del lector la posible demostración de que esta propiedad se verifica siempre, sean cuales sean las cifras.

Adivinar un número de dos cifras

Para acabar con este bloque de trucos numéricos, vamos a ver uno muy simple que según la creatividad de la persona que haga de mago puede adornarse más y mejor.

Aquí están los pasos que hay que seguir:

a) El mago le pide a un voluntario que piense un número de dos cifras y que lo escriba en un papel.
b) Se pasa el papel a otro espectador y se le pide que sume el número 94 al que escribió el compañero, y que escriba el resultado en otro papel.
c) Por último, se pasa el papel a una tercera persona y el mago lanza un dado. Se le pide a esa persona que tache la primera cifra del número, y que a lo que queda, le sume la primera cifra tachada multiplicada por lo que haya salido en el dado. El resultado debe escribirlo en otro papel que entregará al mago.
d) El mago, tras ver lo que está escrito en el papel, adivina el número original.

El objetivo de este truco es enmascarar que lo que va a realizar el mago es sumar en todo el proceso 100 al número, y luego restarle esa cantidad. Veamos el desarrollo.

Si a un número de dos cifras le sumamos 94, obtenemos uno de tres cifras en el que la primera cifra siempre será 1. Al tachar ese 1 lo que estamos haciendo es restarle 100 a la cantidad que teníamos. Al añadir el 1 multiplicado por lo aparecido en el dado, que será un número del 1 al 6, lo que estamos haciendo es añadir al número pensado una cifra entre 1 y 6; lo que hay que añadir al 94 que ya habíamos sumado. Por tanto, el mago lo único que tiene que hacer es sumar 94 con lo que se añada por el lanzamiento del dado, y ver cuánto falta para llegar a 100. Esa cantidad se le añade al número que recibe en el papel, y se obtiene el número que se busca.

Veamos también aquí un ejemplo:

a) El voluntario piensa el número 37.

b) La otra persona suma 94 y obtiene 94 + 37 = 131.

c) Ahora lanzamos un dado y sale por ejemplo 4, el siguiente voluntario tacha el uno inicial y le suma a lo que queda (31) la cifra tachada (1) multiplicada por cuatro. 31 + 4 = 35.

d) El mago recibe el 35, pero como sabe que ha de sumar 94 + 4 = 98, quiere decir que le faltan dos unidades para redondear a 100; se las añade al 35 y obtiene el número pensado al principio, 35 + 2 = 37.

TRUCOS CON MONEDAS

Lo ideal es realizar este truco con monedas de circulación legal, de las que todos tenemos, en mayor o menor medida, en el bolsillo. Si se quiere se pueden preparar para el segundo truco monedas especiales, con clara diferencia entre cara y cruz (algo que no es muy evidente con las monedas de euro), o incluso utilizar fichas de dos colores como las que se utilizan en el juego de Otelo o Reversi.

La colocación de las monedas

El mago entrega a un espectador una moneda de 5 céntimos de euro y otra de 10 céntimos y le dice que, sin que el mago vea lo que hace, se coloque una moneda en cada una de las manos.

A continuación, le indica que multiplique el valor de la moneda que tiene en la mano izquierda por 2, y el valor de la moneda de su mano derecha por 3 y que sume los dos resultados.

Al decir el valor de la suma, el mago sabe inmediatamente en cuál de las dos manos se encuentra la moneda de 5 céntimos, y en cuál la de 10.

La resolución del truco se basa en los números pares e impares. El mago sólo tiene que fijarse en la paridad del resultado. Si la suma es par quiere decir que la moneda de 5 céntimos está en la mano izquierda y la otra en la derecha; si la suma es impar, es la moneda de 10 céntimos la que está en la mano izquierda y la de 5 en la derecha.

Realmente este truco puede realizarse con dos monedas de céntimo cualesquiera, siempre que una tenga un valor impar y la otra par. Incluso se puede entregar al espectador dos montones de monedas, uno con monedas de 1 y 5 céntimos y otro con monedas de 2, 10 y 20 céntimos y pedirle que elija una de cada montón, y adivinar en que mano se encuentra la elegida de cada montón.

Veamos un cuadro en el que aparecen todas las posibilidades:

	SITUACIÓN 1			SITUACIÓN 2		
	Tipo de moneda	**Operación**	**Resultado**	**Tipo de moneda**	**Operación**	**Resultado**
Mano izquierda	Moneda impar	Moneda × 2	Par	Moneda par	Moneda × 2	Par
Mano derecha	Moneda par	Moneda × 3	Par	Moneda impar	Moneda × 3	Impar
		Resultado de la suma =	Par			Impar

Cara o cruz

El mago tiene en la mano unas cuantas monedas y una tarjeta o carta que servirá para tapar una de las monedas.

Sobre una mesa se colocan las monedas y entonces el mago se vuelve de espaldas, dando las siguientes instrucciones a un espectador que habrá salido voluntario: debe ir dando vueltas a las monedas una a una. Puede utilizar las que quiera, incluso alguna que ya haya vuelto anteriormente, y no es necesario que vuelva todas las monedas que están sobre la mesa. La única condición es que cada vez que vuelva una moneda diga en voz alta: "vuelta".

Una vez terminado, tapa una de las monedas con la tarjeta entregada.

Entonces, el mago se da media vuelta y dice sin equivocarse si en la moneda que está tapada puede verse una cara o una cruz.

El truco consiste en contar, antes de darse la vuelta, cuántas monedas hay en la mesa. La cantidad de caras debe ser par o impar, y como cada vez que se dé la vuelta a una moneda cambia el número de caras en una más o menos, lo cierto es que cambia la paridad. Es decir, si había un número par de caras al cambiar una, quedará un número impar o viceversa. El mago lo único que debe hacer es comprobar la paridad inicial, y cada vez que oiga la palabra "vuelta" cambiar de par a impar o al revés. Al acabar, se fija en la cantidad de caras que hay descubiertas; si coincide en paridad con la cuenta que lleva mentalmente, la moneda tapada presenta una cruz, si no coincide, la moneda tapada tiene una cara.

Si estamos preocupados por si nos confundimos al ir cambiando de par a impar mentalmente, otro método sería contar el número de caras y añadir a esa cuenta una unidad cada vez que escuchemos la palabra "vuelta". Si al final el número que nos queda es par, así debe ser la cantidad de caras que habrá sobre la mesa, si vemos un número par, la moneda tapada es cruz. Si es impar hay tapada una cara. Y de forma análoga si nos ha quedado al final un número impar.

TRUCOS CON CARTAS

Al realizar trucos con cartas podemos encontrarnos con distintas posibilidades. En unas es necesario preparar previamente las cartas y en otras se pueden hacer con las cartas de cualquier baraja, sin importar que los espectadores las toquen. Veamos un ejemplo de cada caso.

Los cuatro ases

El mago tiene las cartas de una baraja española (por ejemplo) y le pide a un espectador que diga un número entre el 10 y el 20 (el 10 se acepta pero no el 20). A continuación va colocando cartas una a una boca abajo, tomándolas de encima del montón. Coloca tantas como le haya dicho el espectador. Una vez acabado, suma las cifras de ese número y va tomando una a una tantas cartas del montón auxiliar como indica esa suma, volviéndolas al mazo original (es importante que se vuelvan al mazo una a una).

Al acabar, separa la carta que ha quedado encima del montón auxiliar y la deja sobre la mesa; el resto del montón lo coloca sobre el mazo.

Repite las operaciones anteriores otras tres veces, con lo que al acabar tendrá cuatro cartas sobre la mesa. A continuación lo único que debe hacer es volver boca arriba las cuatro cartas y se comprueba que son los cuatro ases.

La justificación matemática de este truco vuelve a ser la divisibilidad entre 9. Si elegimos un número de cartas entre 10 y 19 y se le resta la suma de sus cifras, siempre nos quedará 9, por lo que quiere decir que al realizar el mago las actividades descritas, siempre nos quedarán en el montón auxiliar nueve cartas, luego en cada caso siempre se separa la novena carta. Basta por tanto preparar previamente la baraja de forma que los cuatro ases sean las cartas 9, 10, 11 y 12 comenzando desde la parte superior.

Las veintisiete cartas

Se eligen veintisiete cartas cualesquiera de la baraja.

Se escoge a un espectador mientras se van repartiendo en tres montones. Se pide al voluntario que elija (sin decirlo) una carta y recuerde en qué montón ha caído. Al acabar nos dirá en cuál de los tres montones está la carta que ha seleccionado.

Se vuelve a montar el mazo, de forma que el montón donde está la carta elegida quede entre los otros dos montones. Vuelve a realizarse el reparto en tres montones, pidiendo que el espectador se fije en cuál de los montones queda su carta y se rehace el mazo con los tres montones, dejando en el centro donde se halla la carta.

Una vez más vuelve a realizarse todo el proceso. Al acabar volvemos a reconstruir el mazo original. Ya lo único que queda es que el mago comience a contar las cartas desde el principio del mazo y al llegar a la número catorce la descubra, porque será la carta elegida por el espectador.

Para ver cómo se desenvuelve la carta basta seguir los procesos. En la primera división, cuando reconstruimos el mazo con los tres montones, la carta buscada quedará entre las nueve centrales (de la diez a la dieciocho). Al hacer la nueva división, en su montón correspondiente quedará entre las tres centrales, por lo que al reconstruir el mazo con los tres montones quedará entre las tres centrales (cartas de la trece a la quince). Por tanto, al hacer el último reparto, la carta quedará en el punto medio exacto de su montón, lo que obliga a que al reconstruir el mazo, la carta queda justo en medio, luego basta contar hasta catorce y allí estará la carta.

OTROS TRUCOS

Existen muchos más trucos que pueden hacerse y que tienen relación con las Matemáticas, pero que por problemas de espacio no podemos incluir aquí. No obstante, antes de acabar vamos a ver al menos un ejemplo de tres grandes bloques que dan mucho juego.

Truco con un calendario

La distribución de valores en un calendario da una gran cantidad de oportunidades para realizar operaciones de muy diverso tipo. Veamos un truco utilizando ese material.

Se le pide a un espectador que elija un mes del calendario y dentro de él rodee con un cuadrado de cuatro números de lado una extensión que comprenda dieciséis números.

Una vez rodeado, el mago escribe en un papel una cantidad y entrega el papel a otro espectador. A continuación, le pide al espectador que realice las siguientes operaciones:

a) Elija un número de los dieciséis que hay y lo rodee con un círculo. Después tache todos los números que están en la misma fila o misma columna que el rodeado.

b) Debe después elegir otro número no tachado y repetir el proceso, rodearlo con un círculo y tachar los de su misma fila y columna.

c) Ya sólo deben quedar sin tachar cuatro números, de todos modos debe elegir uno de los cuatro y tachar los de su propia fila y columna.

d) Al final, queda sin tachar un solo número que se rodea con el círculo.

e) Por último, se suman los cuatro números que han quedado sin tachar y se comprueba que esa suma corresponde con la cantidad escrita en el papel por el mago.

El truco consiste en que el resultado de la suma es independiente de los valores que se tachen o se elijan; siempre que se sigan esos pasos, dará lo mismo. El proceso que se sigue permite que al final quede un número de cada una de las filas, y uno de cada una de las columnas.

Si nos fijamos ahora en cómo será ese cuadrado, es seguro que estará formado por los siguientes números, donde representamos por a al primer número que aparece:

a	$a+1$	$a+2$	$a+3$
$a+7$	$a+8$	$a+9$	$a+10$
$a+14$	$a+15$	$a+16$	$a+17$
$a+21$	$a+22$	$a+23$	$a+24$

Si sumamos los elementos de la primera columna nos da:

$$a + a + 7 + a + 14 + a + 21 = 4a + 42$$

Pero eso sería si tuviéramos los cuatro números de la primera columna. Como deben ser uno de cada columna, quiere decir que uno de ellos debe ser de la segunda columna (por lo que tendrá una unidad más), otro de la tercera columna (que tendrá dos unidades más) y un cuatro de la cuarta columna (que se diferencia en tres de la primera columna). Luego al valor anterior debemos añadir $1 + 2 + 3 = 6$. Quiere decir que la suma de los cuatro números siempre va a dar $4a + 48$ o mejor $4 (a + 12)$. Por tanto, basta fijarse en el número de la esquina superior izquierda y realizar la operación anterior para saber qué resultado dará la suma.

El cuadro que desaparece

Dentro de los trucos geométricos existen varios en los que de una determinada figura dividida en partes, hay partes que aparecen o desaparecen al reconstruirla de otra manera.

Vamos a presentar aquí una de las paradojas más corrientes, que se conoce como el *Triángulo de Curry*. En la figura 1 tenemos un triángulo que dividimos en cuatro piezas. Al ordenar las piezas de distinta manera en la figura 2 obtenemos un triángulo con la misma área, pero al que le falta un cuadrado, (el que aparece sombreado).

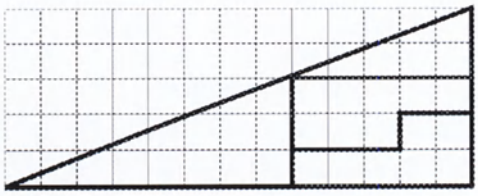


Figura 1

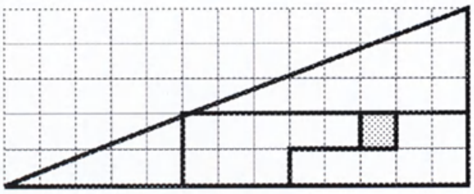


Figura 2

El truco consiste en que al recortar las piezas de la primera figura y reconstruir la segunda, las piezas se montan inapreciablemente unas sobre otras, lo que hace que al final el cuadro que ha desaparecido se reparta entre las junturas de las otras piezas.

Esa idea de repartirse entre varios lugares de forma inapreciable es la idea en la que se basan todos estos puzzles de aparición y desaparición.

Trucos topológicos

Para terminar este ponencia, vamos a presentar un juego de tipo topológico, que es aquel que utiliza cuerdas y otros elementos (bolas, metales, etc.) para realizar nudos que a simple vista no hay forma de deshacer, pero que haciendo un estudio más detenido puede apreciarse por qué lugar pueden deshacerse sin romper nada.

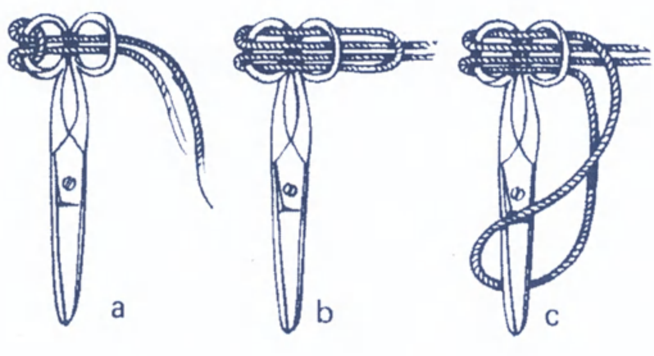
Hay muchos de estos trucos que son utilizados incluso por magos profesionales, pues a simple vista parecen imposibles.

Se realiza un nudo en una tijera, con una cuerda grande y los extremos de esa cuerda se amarran a algún lugar, por ejemplo, la pata de una mesa.

El objetivo es desatar la tijera sin cortar la cuerda.

Lo ideal es pedirle a algún espectador que lo intente y cuando no le salga, introducir la tijera con la cuerda en un saco no transparente. Entonces el mago manipula dentro del saco y extrae la tijera sin modificar la cuerda.

A continuación aparece el proceso que hay que seguir para resolver el enigma (imágenes tomadas de un juego de magia infantil de Educa).



BIBLIOGRAFÍA

[1] Bolt, B. (2001): "La magia de las Matemáticas", *SUMA*, nº 36, pp. 5-15.

[2] Bracho, R (1999): *Actividades recreativas para la clase de Matemáticas*, Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, Delegación Provincial de Córdoba.

[3] Gardner, M. (1992): *Magia inteligente*. Madrid, Zugarto Ediciones.

[4] Lander, I. (1985): *Magia matemática*. Barcelona, Labor.

[5] Muñoz, J.; Hans, J. A. y Fernández-Aliseda, A. (2001): "La magia también se nutre de Matemáticas". *Actas de las X JAEM*, Zaragoza (pendiente de publicación).

[6] Perelman, Y. (1982): *Matemáticas recreativas*. Barcelona, Martínez Roca.

DIFICULTADES EN EL TRÁNSITO DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA A LA UNIVERSIDAD

José Manuel Gamboa
Universidad Complutense de Madrid

Belén Rodríguez
IES Sefarad (Toledo)

INTRODUCCIÓN

Hemos advertido en los últimos años una mayor incidencia de un problema que viene de lejos: para gran número de estudiantes, el tránsito de la Enseñanza secundaria a la universitaria presenta muy notables dificultades. Hemos sentido esta percepción desde dos perspectivas distintas. El primero de nosotros tras impartir durante los últimos tres años en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, junto con los profesores José Carrillo, María Gaspar, Miguel de Guzmán, Joaquín Hernández, Juan Antonio Infante, Ángel Ramos y Mercedes Sánchez, un curso denominado *Laboratorio de Matemáticas*, para alumnos recién llegados a la Facultad y en el que, a través del estrecho contacto sostenido con los estudiantes, hemos creído aprender algo acerca de qué les impide obtener resultados satisfactorios en su proceso de aprendizaje. La segunda, al comprobar cómo, en las condiciones actuales, el desarrollo de la actividad docente en la Enseñanza Secundaria no permite preparar adecuadamente a aquellos alumnos para los que ésta no es una etapa terminal sino el inicio de su andadura universitaria. El problema afecta primordialmente a los que acceden a las facultades de Ciencias y de la Universidad Politécnica, y en particular a los de la licenciatura en Matemáticas, en los que las carencias de carácter formativo, y no sólo informativo, tienen consecuencias muy perniciosas.

Antes de nada queremos justificar el título de esta ponencia: efectivamente existen tales dificultades. La prueba más contundente al respecto son los datos recogidos de los exámenes. A título de ejemplo, señalemos que en los últimos años la cuarta parte de los alumnos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid debe abandonar estos estudios por no aprobar, en ninguna de las convocatorias, asignatura alguna. Más escalofriantes son los siguientes datos facilitados por la Delegación de Alumnos de la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid. Sus alumnos de primero cursan cinco asignaturas de carácter anual: Álgebra, Cálculo, Física, Química y Dibujo. Algunos datos sobre los resultados de los exámenes celebrados en los últimos tres años se recogen en la siguiente tabla.

Resultados obtenidos en los tres últimos años, convocatoria de junio, por los alumnos de la Escuela de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid

Curso	1998-1999	1999-2000	2000-2001
Promedio de asignaturas de primer curso aprobadas por un alumno	1,30	1,06	0,97
Porcentaje de alumnos que no aprobaron ninguna asignatura de primer curso	39,1	49,3	52,2
Porcentaje de alumnos que aprobaron todas las asignaturas de primer curso	5,2	4,7	1,6

Pero no son únicamente estos resultados los que prueban que las cosas no marchan bien. La participación de los alumnos en las clases es poco más que testimonial y rarísima vez proponen un procedimiento alternativo para resolver alguna cuestión o inquieren acerca de la posible relación entre los contenidos de una misma materia o de materias distintas.

El profesor que no da la clase vuelto de espaldas siente pudor al mirar a la mayoría de los alumnos más de tres segundos seguidos, pues es imposible no percibir que está frente a un colectivo de copiadores de apuntes que, por regla general, no sigue los razonamientos expuestos. Una buena prueba de lo que decimos es que casi todos los estudiantes de primer curso se encogen de hombros cuando, trascurridos un par de meses desde el comienzo de las clases, se les pregunta ¿qué estáis viendo en tal o cuál asignatura? El problema se agudiza en las materias de Matemáticas, en las que además de la introducción de un aluvión de nuevas definiciones, el alumno se enfrenta ante el problema de que el docente emplea un lenguaje totalmente desconocido, en cuya introducción apenas se emplea tiempo. Las Matemáticas presentan, además, una característica diferenciadora. En ella los asertos se demuestran, para lo cual los profesionales de esta disciplina disponemos de un cierto arsenal de estrategias, que el estudiante recién llegado a la Universidad ignora por completo. Nuestra experiencia nos dice que emplear un tiempo prudencial en enseñar las diferencias entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje matemático, en disponer de mecanismos que garanticen la veracidad de una afirmación, y en aprender a emplearlos, averiguando cuál es el más procedente en cada caso, es imprescindible.

Más aún, hemos observado que no sólo se desconocen estas cosas sino, lo que es peor, en ocasiones las que se conocen se conocen mal. Sirva como muestra la siguiente situación, planteada a los alumnos de primer curso de la Licenciatura en Matemáticas: el sujeto A le dice a B: si me invitas a tu casa, iré a visitarte. B no le invita, pero A se presenta en su casa. ¿Faltó A a la verdad con su actuar? Para nuestro asombro, 4 de cada 5 de nuestros alumnos respondió que, en efecto, A había hecho lo contrario de lo que dijo. Esto muestra, claro está, un profundo desconocimiento acerca de cómo decidir la veracidad de asertos del tipo *si... entonces...*, tan empleados en Matemáticas. Y lo curioso es que también se utilizan en la vida cotidiana, pero en ella el contexto ayuda a descartar actitudes tan inverosímiles como que me presente en tu casa sin que me invites.

Todo lo dicho hasta ahora no es nuevo de esta época. ¡Pero es que tampoco es nuevo el problema de cómo transitar de una enseñanza a otra! Lo que en todo caso es nuevo es el interés compartido por docentes de secundaria y universitarios por buscar soluciones a un problema cuya existencia creemos que queda probada. Antes de analizar algunas de sus posibles soluciones, es imprescindible diagnosticar sus causas, que a nuestro juicio son de diversa naturaleza. Comenzaremos por revisar las de carácter social, para estudiar después las de índole académica, entre las que algunas parecen atribuibles al devenir de la Enseñanza Secundaria y otras tienen su origen en el ámbito universitario.

CAUSAS DE CARÁCTER SOCIAL

Sospechamos que, lamentablemente, son razones de índole extraacadémica las mayores responsables del problema que pretendemos analizar. Y decimos lamentablemente porque, al escapar del ámbito académico, nuestra posibilidad de actuación sobre ellas es mucho más limitada. Es indudable la influencia del entorno sobre todos nosotros, pero ésta es mucho mayor sobre los adolescentes, por lo que son múltiples los factores que afectan a su proceder y tienen una incidencia decisiva en su rendimiento académico. Entre todos ellos hemos elegido cuatro que a nuestro juicio explican en cierta medida lo que está sucediendo.

¿Cuándo se nos exige ser competitivos?

Hoy en día es excesivo el proteccionismo con que las familias tratan a los más jóvenes. Estos emplean, con la aquiescencia de sus padres, gran número de horas en lo que llaman *vida social*, gozan de multitud de caprichos, son animados al consumo desde los medios de comunicación y disponen de más o menos dinero para consumir, y nada de esto es consecuencia de su empeño. Si a esto sumamos la retahila de actividades paralelas que son incitados a practicar, resulta que el estudio pasa a ocupar un lugar muy secundario entre sus quehaceres, y en pocos casos es considerado una obligación. De hecho no es infrecuente que el bajo rendimiento escolar sea consecuencia, más que de la ausencia de capacidades intelectuales, del desinterés y de no adecuar el esfuerzo que se realiza a las metas que se intentan alcanzar.

A título de ejemplo, señalemos que los alumnos que acceden a la Facultad de Matemáticas muestran estupor, por no decir otra cosa, cuando se les sugiere que deben estudiar, diariamente, una hora por cada hora de clase recibida, lo que se traduce en unas cuatro o cinco horas al día, cifra ésta que les parece desmesurada. En los tiempos que corren no es corriente alentar a realizar el esfuerzo necesario para alcanzar ciertos objetivos, y el bienestar del joven no es consecuencia de su interés, y mucho menos de su éxito.

Y lo más contradictorio de todo esto es que alrededor de los 24 años todo cambia súbitamente y el individuo se enfrenta a una de las sociedades más competitivas en la historia de la humanidad. Todos sabemos lo difícil que es actualmente encontrar un trabajo a media jornada o que te permita dedicarte a otras actividades, y cómo las empresas practican el *up or out*[1]. Ante esto parece que desde la familia y la sociedad se le transmite al joven el mensaje "diviértete mientras puedas", cuando en nuestra opinión sería más aconsejable el "prepárate, fórmate, que esto te permitirá ser más libre y más crítico y de este modo te será más fácil disfrutar con tu trabajo".

[1] Asciendes en la empresa, te involucras en ella, o te vas fuera.

La supuesta estrechez de la banda de calidad de vida

Un amigo común nos relató hace poco la conversación sostenida con uno de sus hijos, brillante estudiante por otro lado, en la que le venía a decir: "¿esforzarse para qué?" Según él, y creemos que esta percepción está muy extendida, la anchura de la banda limitada por los niveles de bienestar máximo y mínimo alcanzables por una persona ha disminuido muy notablemente. Se da por seguro que entre los padres y el Estado se encargan de que las necesidades básicas estén bien cubiertas, luego muy bajo no se puede caer y, salvo que robes de modo más o menos impune, tampoco se pueden alcanzar muy altas cotas de bienestar. Si uno intenta introducir como otro indicador de calidad de vida el trabajar en algo que a uno le guste, e intenta encontrar en ello un motivo para el esfuerzo, se suele encontrar con otra respuesta aún más demoledora: "¿y qué sé yo lo que me gusta?" No sabemos explicar la generalizada carencia de interés, de motivación, de vocación, de gran parte de los jóvenes, cuando la amplitud del abanico actual de oficios y titulaciones nos inclinarían a priori a conjeturar todo lo contrario.

Lo que sí sospechamos es que los medios de comunicación juegan un nefasto papel en cuanto a promover valores como el esfuerzo, alcanzar objetivos a largo plazo, etc. Desde ellos se trasmite al joven la idea de que todo se debe lograr deprisa, que lo importante es tener suerte, y que trazarse un camino y seguirlo está pasado de moda.

El contexto familiar

A pesar de que el nivel cultural medio de los actuales padres de familia es sensiblemente superior al que tenían los que lo eran hace dos décadas, la atención que por término medio prestan al proceso de formación de sus hijos es muy deficiente. Es infrecuente que sepan qué están aprendiendo, y mucho menos cómo lo hacen. Se suele aducir que son las largas jornadas laborales de los miembros de la pareja las causantes de esta desatención. Con ser esto cierto, no nos parece lo fundamental. Más bien creemos que, en muchas familias, ha desaparecido la idea de que el proceso de formación del adolescente y del universitario es una tarea en la que están involucrados todos los educadores, incluyendo a los padres, que con frecuencia se limitan a pedir explicaciones del fracaso escolar de los hijos. De hecho, hemos vivido en primera persona y nos han relatado infinidad de anécdotas con un denominador común: con enorme frecuencia los padres no sólo no colaboran en el proceso formativo de sus hijos, sino que desautorizan ante ellos al profesorado. Por otro lado, no hay que olvidar que los hijos tienden a reproducir el modelo paterno/materno, y los jóvenes no hacen sino sufrir la pérdida de algunos valores en la sociedad actual. Nos es difícil creer que en una familia en la que se propicie el diálogo, la orientación, la preocupación de unos por el quehacer de los otros, y se advierta en sus miembros adultos sentido de la responsabilidad, búsqueda de la coherencia..., no se eviten, al menos parcialmente, algunos de los problemas que estamos relatando.

Somos romanos, no griegos

Esta reflexión está más directamente dirigida a los docentes en Matemáticas. Hace ya bastantes años que se advirtió un brusco descenso en el número de alumnos matriculados en las facultades de Filosofía, fenómeno paralelo al absoluto desinterés de la sociedad por estos temas. Mientras, los científicos en general y los matemáticos en particular pensábamos que este problema no nos afectaría, pues estábamos convencidos de cultivar disciplinas del máximo interés social. Sin embargo, alejados como vivimos de la concepción griega de sociedad y cultura, los matemáticos asistimos a una deserción en masa de los alumnos de las aulas de las facultades de Matemáticas. El descenso en el número de matriculados es sensible y uniforme en todo el país y, lo que a nuestro juicio es más grave, aún es más acusado el descenso en el nivel de interés, curiosidad, capacidad y dedicación de los que todavía acuden a ellas.

En la sociedad de nuestros días está sucediendo algo semejante a lo que ocurrió en la Antigua Roma, en la que se avanzó en la construcción de carreteras o la Medicina, pero apenas nada en las Artes o Ciencias que implican mayor capacidad de reflexión o pensamiento: los actuales estudios de Matemáticas son complicados para el escaso brillo social y nivel de retribución que proporcionan. No cabe duda de que no sólo los gobernantes sino la sociedad en general desatiende al científico, y hemos de reconocer que desaconsejamos en muchas ocasiones dedicarse a esta actividad. Y sólo parece razonable alentar a seguir el camino de la investigación a aquellos que, además de unas cualidades excepcionales para las Matemáticas, reúnen otras no menos excepcionales de carácter humano, entre las que se deben encontrar la falta de interés por lo material, la capacidad para aceptar la incomprensión de sus semejantes y la de compatibilizar su vida afectiva con una dedicación constante a la investigación.

Pasamos ya a exponer algunas de las causas de carácter académico, con origen en la Enseñanza Secundaria, que inciden decisivamente en que el tránsito de ésta a la universitaria sea más un salto de pronunciado desnivel que una suave pendiente. Por supuesto, no pretendemos exponer una relación exhaustiva de las mismas, sino sólo reflexionar acerca de aquellas que a nuestro juicio son más relevantes.

CAUSAS DE CARÁCTER ACADÉMICO ATRIBUIBLES A LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

La más frecuente de las causas del fracaso en el desempeño de una tarea suele ser el no saber hacerla. Pues bien, el ámbito escolar no es una excepción a esta regla, y por ello estimamos que el problema que nos ocupa hunde sus raíces en él.

Desconocimiento de en qué consiste estudiar

Cuentan de Villar Palasí, ministro del franquismo impulsor de la Ley General de Educación de 1970, que eligió como procedimiento para aprender japonés estudiar cada día una página del diccionario. Ignoramos cómo le fue en su estancia en dicho país, pero de lo que no cabe duda es de que no produjo un solo renglón de literatura en ese idioma. Pues bien, una inmensa mayoría de los estudiantes que llegan a la Universidad estudian Matemáticas por procedimientos análogos. Es claro que no existen modos únicos para aprender, pero no se debe olvidar que la Matemática nace cada día en el intento de resolución de problemas, y éste ha de ser el hilo conductor de su estudio. Muchos de los alumnos del primer curso ni siquiera intentan resolver por sí mismos los ejercicios que se les proponen, y suelen decir: "es que todavía estoy leyendo el diccionario", es decir, "estoy estudiando la *teoría*, y cuando me la sepa empezaré a hacer problemas". Naturalmente, nunca se la saben, y por tanto nunca empiezan. Somos muchos los que les aconsejamos que, por contra, estudien haciendo problemas, que en la mayoría de los casos son meros ejercicios que ayudan a desencriptar el lenguaje, para ellos oscuro, empleado en enunciados muy generales y que utilizan, como en el ejemplo inicial, *japonés*.

¿A qué se debe ese no saber estudiar? Habrá sin duda quien, con sobrado fundamento, nos contradiga, pero pensamos que la Enseñanza Secundaria, incluso en Matemáticas, y mucho más en otras disciplinas, está todavía imbuida de un componente memorístico muy pernicioso. Parece además comprobado que si alguien desconoce, por ejemplo, la fórmula del seno de la suma, pero se percata de que si éste fuese expresable en términos que sólo involucraran las razones trigonométricas de los sumandos tendría resuelto cierto problema, busca dicha fórmula con fruición y, cuando la encuentra, su cerebro la graba con mucha mayor intensidad que si la aprende sin un para qué. El componente memorístico se aprecia también en que los estudiantes no son conscientes de cuán importante es saber qué depende de qué y sólo se centran en intentar recordar cómo depende.

Nuestros estudiantes intentan maximizar las calificaciones obtenidas minimizando el número de horas de estudio, lo que no deja excesiva cabida al proceso de comprensión. En Matemáticas se presenta, además, un problema que no se da tanto en otros estudios: la interrelación entre los diversos conocimientos es muy fuerte, y así la falta de una base adecuada impide estudiar. En muchas ocasiones, cuando el estudiante lo intenta, ya es tarde, y los alumnos de un primer curso universitario son un claro exponente de lo que decimos.

Ausencia de hábitos de estudio

Los niveles de exigencia en la enseñanza secundaria han descendido tanto que muchos estudiantes se acostumbran a superar los objetivos con escaso esfuerzo. Entre los que llegan a la Facultad de Matemáticas de la UCM la inmensa mayoría declaran que no les ha costado nada aprender en Secundaria, y cifran en 27 minutos de media el tiempo dedicado diariamente al estudio, por lo que es impensable que súbitamente pasen a estudiar cuatro o cinco horas. Cómo serán las cosas que, para nuestro asombro, un buen número de alumnos prioriza, a la hora de fijar fechas de exámenes, la disponibilidad de tiempo de ocio respecto de que la distribución sea homogénea y permita disponer del tiempo suficiente para preparar cada uno de ellos.

Tertuliano[2] decía que se deja de odiar cuando se deja de ignorar. Creemos que tenía razón, lo que explica por qué los alumnos se aburren tanto cuando estudian. Lo hacen tan poco que su ignorancia les hace odiar lo que estudian. Así pues, si al hecho de no saber estudiar añadimos una ausencia casi absoluta de disciplina de estudio diario, encontraremos un par de buenas explicaciones del fracaso.

[2] Quinto Septimio Tertuliano, moralista nacido en Cartago (155-220 d.C.) y convertido luego al cristianismo.

Muy bajo nivel de conocimientos

Hemos leído con detenimiento algunos de los textos empleados en la enseñanza de Matemáticas de 1º y 2º de Bachillerato, y nos parecen excelentes. Contienen la información suficiente, rigurosamente expuesta, para que no se produzca ningún salto respecto de lo que la Universidad asume que se conoce. ¿Por qué se percibe entonces un bajísimo nivel de conocimientos entre los estudiantes que acceden a la Universidad? Muchos conoceréis la respuesta mejor que nosotros. A través de nuestra propia experiencia y muchas conversaciones con profesores de Secundaria hemos llegado a la conclusión de que una cosa es lo que ponen los libros, otra lo que se explica y otra lo que se aprende.

A este respecto creemos que las pruebas de Selectividad han focalizado la enseñanza de las Matemáticas en una doble vertiente. Por un lado se enseña *lo que va a caer*, de modo que los estudiantes, al llegar a la Universidad, han olvidado, si alguna vez lo supieron, la combinatoria, los números complejos, la noción de aplicación inyectiva, y qué decir de las cuestiones acerca de divisibilidad, o números primos, o la geometría elemental, pues todas estas materias no son objeto de dicha prueba. Por otro, y esto es más grave aún, se enseña a *resolver los ejercicios de selectividad*, una cantidad muy reducida de problemas tipo, ya que *si se quieren obtener buenos resultados no se puede profundizar lo que nos gustaría.*

Creemos que otro factor que contribuye a que la adquisición de conocimientos sea tan baja es la *parcelación excesiva de la materia de examen*. Los alumnos se acostumbran, en el mejor de los casos, a aprender, examinarse y olvidar. Esto, que es pernicioso en todo proceso de aprendizaje, lo es más si cabe en Matemáticas. Por ello, parece recomendable que la materia de examen en cada control fuera la unión de la propia del periodo de tiempo de evaluación y la ya vista hasta el momento. Yendo aún más lejos, no es descabellado proponer pruebas en la que haya presencia de los contenidos de los cursos precedentes.

Falta de capacidad discursiva

Todo lo anterior trae consigo una muy escasa capacidad para discurrir. Esto consiste, en buena medida, en adaptar a una nueva situación argumentos que uno ya ha empleado o ha visto emplear en otras situaciones, echando mano de lo que nuestro cerebro ya ha asimilado. Claro está, si el alumno ha asimilado muy poco, no es capaz de establecer conexiones entre lo que conoce y lo que se propone abordar. Por otro lado, no cabe duda de que para crear es imprescindible dominar previamente la técnica. Esto es así en literatura, pintura,... y también en la ciencia. Los alumnos llegan a la Universidad con gran falta de destreza técnica, y esto supone un notable obstáculo a la hora de discurrir, pues se ven obligados a desechar buenas estrategias en la resolución de problemas por la falta de recursos.

Permítasenos relatar una experiencia del curso de *Laboratorio* ya citado. Se les preguntó a los estudiantes qué suceso es más probable al lanzar 20 monedas al aire: que salgan 6 caras o 14 caras. Esperábamos que calculasen las probabilidades p_A y p_B de ambos sucesos y tras operar comprobaran que coincidían, para después pedirles que encontraran una explicación más conceptual de la igualdad $p_A = p_B$ que no exigiese conocer ambas probabilidades. Pues bien, el 93% de los alumnos no fueron capaces de calcular ni p_A ni p_B , ni mucho menos demostrar que coinciden. Este es un ejemplo claro de cómo el ignorar destrezas básicas impide ir más allá en el proceso discursivo. Al hilo de este ejemplo, queremos destacar la casi completa ausencia de experiencias por parte del alumnado de cómo, con enorme frecuencia, para calcular el valor de la suma o resta de dos entes no sólo no es necesario conocer ambos, sino que ni siquiera es conveniente. Esta ausencia de capacidad discursiva se manifiesta de varias formas más.

Por un lado, el escaso dominio del lenguaje cotidiano trae consigo que el alumno no sepa *modelizar matemáticamente* en el sentido más grosero de la expresión. Sólo sabe resolver ejercicios rutinarios en los que *las x y las y ya están puestas*, pero no entiende enunciados de cinco líneas. Por otro, ignora el significado de la demostración en Matemáticas. Muchos alumnos apenas han leído o escuchado alguna, y la inmensa mayoría no ha hecho una en su vida. Expondremos un ejemplo más. Se les propuso a los alumnos de *Laboratorio* que probaran la siguiente afirmación:

si n es un número natural y n^2 es impar, entonces n es impar.

La gran mayoría lo confundió con otro enunciado: *si n es un número natural impar, entonces n^2 es impar*. Tras aclararles cuál era el enunciado que debían demostrar, los más aventajados experimentaron un poco:

$$2^2 = 4, \quad 4^2 = 16, \ldots,$$

e impúdicamente concluyeron que ya era suficiente. Todos coincidieron en que un razonamiento del tipo

si n fuese par, digamos $n = 2k$, entonces $n^2 = 4k^2$ también sería par, lo cual es falso

era desconocido para ellos.

Este ejemplo muestra cuán alejados se encuentran de haber entendido y utilizado el significado de *si p entonces q*, del *si y sólo si*, de utilizar, con ese nombre o con cualquier otro, la demostración por reducción al absurdo, y, en fin, todas las destrezas elementales necesarias para producir demostraciones en Matemáticas. Otro tanto cabe decir del empleo de los cuantificadores, y así nos llevamos las manos a la cabeza al constatar que no saben distinguir entre las frases

para cada $x \in [0,1]$ existe $y \in [0,1]$ tal que $x + y = 1$

existe $y \in [0,1]$ tal que para cada $x \in [0,1]$, $x + y = 1$

y en consecuencia no saben que la primera es cierta y la segunda falsa.

Todo esto es infinitamente más sencillo que las nociones de límite, derivada e integral que se explican en el Bachillerato, pero como no admite un tratamiento tan repetitivo como algunos aspectos calculísticos sobre estos temas, los alumnos se sienten perdidos, sin mecanismos para pensar. No es de extrañar, pues creemos que no lo hacen nunca. Incluso en lo tocante a estos temas tan trillados en Secundaria, uno se extraña al constatar su escasa capacidad de discurso. Permítasenos relatar un ejemplo más: a los citados alumnos de *Laboratorio* se les suministraron las gráficas de una función real de variable real f, de su derivada f' y de su segunda derivada f'', y se les pidió que identificaran cuál era cuál, para lo que era suficiente conocer que el crecimiento de una función se corresponde con la positividad de la derivada. Pues bien, el resultado fue, una vez más, desalentador. La conclusión es que el alumno que llega a la Universidad sabe, en el mejor de los casos, aplicar algunas fórmulas, pero en escasísimos casos sabe deducir, razonar.

No creemos que para remediar este problema sea necesario poner patas arriba los planes de estudio de la Enseñanza Secundaria, sino más bien cambiar el qué se enseña y modificar la perspectiva y horizontes con que se hace. Tal vez algunos de los alumnos de la actual Enseñanza Secundaria no estén capacitados para el discurrir en Matemáticas. ¡¡Pero muchos otros sí!!

Errónea aplicación del principio de atención a la diversidad

Creemos que aquí se halla el origen de todos los males. Jefferson[3] dejó escrito que nada es más opuesto a la igualdad que tratar de modo igual a los desiguales. Siguiendo este principio, es comúnmente aceptado que los servicios sanitarios de un país deben proponerse como objetivo que cada ciudadano alcance el mayor grado de salud y bienestar que su edad, su código genético, sus dolencias previas, y el conjunto de sus circunstancias personales le permitan. ¡Y tienen la obligación de atendernos a todos, obteniendo el máximo de cada uno de nosotros! Del mismo modo, admitiendo el modelo de escolarización obligatoria hasta cierta edad, parece razonable que todos los partícipes en el proceso educativo se marquen como objetivo obtener también el máximo de cada alumno. Sin embargo, y pese a las indudables deficiencias que presenta nuestro sistema sanitario, los médicos tienen la oportunidad de diagnosticar individualmente a sus pacientes y prescribir a cada uno el tratamiento que juzgan conveniente.

¿Qué diría la sociedad si el mismo rehabilitador músculo-esquelético tratara simultáneamente, durante el mismo período de tiempo y con los mismos ejercicios, al atleta de élite que intenta recuperarse de una lesión para seguir compitiendo, y al anciano con artrosis que percibe dificultades para realizar algunos movimientos básicos como caminar o subir escaleras? Es obvio que cada uno debe ser sometido a un proceso diferente y, que nadie lo olvide, tan feliz se siente el deportista recuperado para la alta competición como el anciano cuyas molestias han disminuido. Pues bien, nosotros no podemos hacer esto, nuestros alumnos reciben todos las mismas explicaciones y se someten a los mismos ejercicios, por lo que la mayoría nos vemos impelidos a dirigirnos al alumno medio-bajo. Esto presenta dos efectos muy nocivos. Por un lado, el alumno desinteresado, poco dotado intelectualmente, y que acumula un retraso notable a causa de las ignorancias provenientes de cursos previos, no se siente atendido, se convierte en lo que con acierto algunos llaman *alumno-objetor*, por lo que con su actitud interfiere muy notablemente en el proceso de aprendizaje de todos los integrantes del aula. Por otro, y esto no es en absoluto menos importante, el estudiante interesado en aprender, con capacidad e imaginación, y con aspiraciones de realizar estudios universitarios de cierta envergadura intelectual, se encuentra completamente desatendido.

Llama poderosamente la atención que mientras la comunidad educativa es parcialmente sensible al problema del primero de estos colectivos, y ahí están los equipos de orientación, los psicólogos, etc., tratando de paliar los trastornos que a sí mismos y a los demás crean estos estudiantes, el segundo colectivo se encuentra completamente desamparado.

[3] Thomas Jefferson (1743-1826), presidente republicano de los EEUU de América durante dos mandatos.

Alumnos que realizan el Bachillerato con gran brillantez son exigidos mínimamente, y así se les hurta en buena medida la formación que requieren, por lo que sufren después considerablemente en su tránsito a la enseñanza universitaria. Parece obvio, por tanto, que se requiere un esfuerzo económico por parte de la Administración, y de voluntad e imaginación por parte de los docentes, para atender un amplísimo abanico de capacidades y aspiraciones. ¡¡Y con un agravante!! Siguiendo con el ejemplo sanitario, el atleta de élite y el anciano con artrosis conocen sus características y demandan aquello que necesitan, mientras que la mayoría de los estudiantes, y más aún los de secundaria, lo desconoce, por lo que no lo puede demandar. Esto exige, claro está, una atenta actitud por parte de los educadores para detectar las habilidades y capacidades de cada uno, y orientarle así en la dirección adecuada a sus características.

Por todo lo anterior consideramos imprescindible incrementar de modo notable las plantillas de profesorado, disminuir el número de alumnos por aula, agrupar a éstos *entre semejantes* y solicitar del profesorado una especialización en grupos de distinta capacidad e interés y, para aquellos que no lo crean conveniente, una disposición para impartir su docencia de modo distinto a seres distintos.

Hemos dejado para el final el análisis de aquellas causas que inciden en el problema que venimos abordando, que provienen de un mal quehacer dentro del ámbito universitario, y no porque sean las menos relevantes, sino porque aparecen en el último eslabón de la cadena.

CAUSAS DE ÍNDOLE ACADÉMICA ATRIBUIBLES A LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

La primera de estas causas tiene carácter voluntarista, y por eso la hemos denominado:

¿Queremos evitar que se produzca un salto al vacío?

La Universidad en su conjunto contribuye en escasa medida a corregir los problemas anteriormente expuestos. ¡Y no porque se desconozcan, sino porque deliberadamente se ignoran! También es un mandato del profesorado universitario obtener el máximo de cada estudiante, pero éste no es objetivo prioritario de casi ninguno de nosotros. Se olvida con frecuencia que nuestra obligación es tomar al alumno tal y como viene e intentar que de nuestra mano, y con su esfuerzo, alcance cotas dignas de conocimiento y maduración intelectual. No hace falta ser muy perspicaz para percatarse de cómo ha disminuido en los últimos años el nivel de conocimientos de los alumnos que recibimos, que un porcentaje alto de ellos no comprende ni los razonamientos expuestos ni los enunciados de los ejercicios que se les proponen, que copian apuntes sin entender lo que copian, con una participación bajísima en clase, pero, se dice no pasa nada, y a veces, si pasa, pues "que se las apañen". Buena parte del profesorado cree, en una palabra, que es cada estudiante el que debe soslayar el problema que supone el considerable salto que, tanto en conocimientos como actitud ante el estudio, supone el acceso a algunas carreras universitarias. En resumidas cuentas, con mucha frecuencia se acepta que la diferencia entre la formación y conocimientos con que accede el estudiante a la Universidad y la que debiera tener para seguir los cursos que recibe, constituye un problema sólo del estudiante y no de la Universidad.

Nuestra opinión al respecto es la opuesta. Creemos que debemos inicialmente diagnosticar al alumno que nos llega e intentar que alcance su máximo nivel de formación. Para ello pensamos que es fundamental incidir en que el aprendizaje no es un proceso lineal, sino más parecido al acercamiento, en etapas sucesivas, al corazón de una cebolla desde sus capas más externas, o al pintado de una pared, que requiere varias capas para alcanzar un perfecto acabado. El formalismo de las Matemáticas aumenta el riesgo de caer en la tentación de la visión lineal del aprendizaje, lo que a nuestro juicio es un error. Las definiciones no se entienden por estar escritas en la pizarra y ser formalmente correctas. Uno no hace suyos los conceptos sino a través de ejemplos bien escogidos, con distinta graduación de dificultad, ni puede aprehenderlos si no trascurre un tiempo prudencial de maduración. ¿Cuántas veces cae uno en la cuenta de que algo que creía entendido no lo estaba del todo? Algunos parecen olvidar que da estupendos resultados aprender a calcular determinantes mucho antes de saber lo que es una aplicación multilineal, o a calcular áreas y volúmenes mediante la regla de Barrow sin conocer la noción de integral de Riemann, y que la familiaridad con su cálculo constituye una inestimable ayuda psicológica al intentar entender lo que son. Y como éste se pueden citar miles de ejemplos. A nuestro juicio, este paso desde las pieles exteriores de la cebolla a las más íntimas debe ser una constante del proceso de aprendizaje, lo que junto con un adecuado diagnóstico del alumnado que llega a las aulas universitarias, y con el tratamiento que requiere por medio de tutorías, grupos reducidos de trabajo, la corrección meticulosa por parte del profesorado de algunos ejercicios resueltos por los estudiantes, etc., contribuiría decisivamente a mejorar su rendimiento y, lo que es más importante, incidiría en que el proceso se realizara con gusto.

Desacreditación del esfuerzo docente

Tres son las obligaciones básicas del profesorado universitario: investigar, enseñar y gestionar. La cantidad y calidad de la investigación matemática que se hacía en España hace 40 años era bastante pobre y gracias, sobre todo, al esfuerzo de algunos matemáticos españoles cuya edad se sitúa entre los 50-65 años, y unos pocos de sus predecesores, la situación ha mejorado enormemente, y somos muchos los que nos hemos beneficiado de ello. En esta situación, desde el momento en que un estudiante brillante obtiene su primera beca para formarse como investigador y futuro profesor universitario, percibe la importancia de convertirse, en no muchos años, en especialista reconocido en una parcela del saber, y no sólo por el bien de la Ciencia, sino por su propio interés de supervivencia en el ámbito universitario. Esto, que ha propiciado un ambiente investigador de aceptable nivel, ha traído consigo un cada vez menor empeño por realizar un buen quehacer docente aunque, en nuestra opinión, ambas tareas deben ser complementarias. Algunas muestras de lo que decimos son las siguientes:

1) Salvo casos excepcionales, hoy es frecuente que el futuro profesor apenas imparta clases antes de los treinta años.
2) No deja de ser indicativo que al desempeño de la labor de enseñar se le denomine actualmente *la carga docente.*
3) Al profesorado se le ofrecen un par de aumentos de sueldo, uno por el quehacer docente, cada cinco años, y otro por el investigador, cada seis. Mientras éste segundo es concedido en base al cumplimiento de ciertos objetivos no desdeñables, evaluados por una comisión creada al respecto, el primero se concede *de oficio*, sin evaluación alguna.

4) Los estatutos aprobados por los claustros universitarios atribuyen a los departamentos la tarea de organizar la docencia. En la práctica esto es inviable, pues en la distribución de la actividad docente entre sus miembros no se tienen en cuenta las habilidades y conocimientos de cada profesor, sino que se atiende únicamente a los tradicionales criterios de categoría y antigüedad. Quizá los mejores profesores, los que mejor saben las cosas y mejor las trasmiten, tienen la obligación, al menos moral, de encargarse de los primeros cursos de la Licenciatura, aquellos en los que el proceso de trasmisión de la Ciencia es más delicado. Sin embargo sucede lo contrario, y algunos buenos docentes huyen con frecuencia de los primeros cursos pues exigen una mayor atención al alumnado.
5) La enseñanza de las Matemáticas requiere un gran cuidado. Es imprescindible elegir bien el orden en que se introducen las distintas nociones y exige, como ninguna otra disciplina, explicar los problemas que dieron lugar a las teorías que se desarrollan en clase; hasta dónde llegan las técnicas expuestas y qué problemas exigen nuevas ideas; confeccionar un buen material didáctico, o al menos recomendar la bibliografía idónea; la elaboración de adecuadas listas de ejercicios, que no es tarea baladí; atender a los alumnos en las tutorías, etc. Pues bien, este esfuerzo tiene actualmente poca recompensa, tal vez por la prevalencia de la labor investigadora.

Nuestra Licenciatura es especial

Suponemos que serán muchos los centros universitarios que hayan percibido un empeoramiento de las condiciones en que acceden los estudiantes, pero las Facultades de Matemáticas son especialmente sensibles al problema. La buena o mala preparación previa no parece tan relevante a la hora de formar fisioterapeutas e incluso médicos. De hecho parece factible preparar excelentes cirujanos cuyas capacidades de razonamiento quedaran enterradas para siempre en su adolescencia, y las Facultades de Medicina cumplen estupendamente su cometido proporcionando a la sociedad tales profesionales. En Matemáticas no sirve de nada un calculador de ecuaciones de cónicas ni un resolutor de ecuaciones diferenciales. Se trata de formar personas con capacidad para pensar y, con frecuencia, los programas de las asignaturas no son más que un instrumento que permite desarrollar tales capacidades. Creemos que es por ello por lo que estas Facultades, y en general la docencia de las asignaturas serias de Matemáticas de otras carreras, sufren como pocas el deterioro que está sufriendo la Enseñanza Secundaria. Y es que la licenciatura en Matemáticas exige disponer de los alumnos adecuados. Por ello quisiéramos terminar estas reflexiones con una mirada al perfil del alumno medio que llega actualmente a las Facultades de Matemáticas y la adaptación al mismo por parte del profesorado.

Hace ya tiempo que, salvo estupendas excepciones, éstas dejaron de recibir a los alumnos mejor dotados para las Matemáticas, que encaminan sus pasos hacia ciertos estudios de Ingeniería o Informática. El siniestro sistema ideado por las autoridades nos ha llevado a acoger en nuestras aulas muchos estudiantes con vocación para la enfermería o aspirantes a trabajadores sociales, cuya baja nota en la Selectividad les impedía acceder a los estudios que preferían cursar. Nos hemos encontrado de repente con muchas personas con bajo rendimiento escolar previo, y escaso interés y aptitudes para las Matemáticas, a los que hemos tratado como si de brillantes entusiastas de las Matemáticas se tratara. Por supuesto los resultados no se han hecho esperar, y actualmente nos encontramos con el dilema de elegir entre impartir cursos medianamente exigentes, sólo al alcance de unos pocos, o diseñar unas enseñanzas accesibles para un abanico más amplio de personas. Posiblemente nos veamos abocados a implantar, también en este nivel, la atención a la diversidad. Esperemos tener éxito.

MÚSICA Y MATEMÁTICAS

Rafael Losada
IES Antonio Machado, Madrid

PRÓLOGO

Esta conferencia es parte de un trabajo más amplio y detallado realizado para el CAP Latina-Carabanchel cuyo contenido se puede solicitar a ese centro, o bien ver en la dirección de Internet www.anarkasis.com/pitagoras/

Este resumen de la conferencia puede dar una idea de la misma. Sin embargo, no es un buen reflejo de ella, pues el papel no permite el uso interactivo de los applets, animaciones, videos, sonidos y aplicaciones diversas que se distribuyen a través de las páginas html (web) que la componen. Por esta razón, la dirección anterior puede resultar muy útil a las personas interesadas en el tema.

APLICACIONES UTILIZADAS

	El proyecto *Descartes* se basa en el *nippe* o *applet* (aplicación Java) de José Luis Abreu que permite la construcción de escenas interactivas a partir de la modificación de unas pocas *herramientas.* No hace falta programar en Java. Basta un poco de ingenio para crear todo un mundo de simulaciones. En este trabajo la clave de las escenas reside en la introducción de un parámetro esencial: el tiempo.
	Cabri-2 permite crear fácilmente escenas geométricas interactivas.
	CabriJava es el complemento perfecto de Cabri-2, pues integra las escenas creadas en la página web.
JAVA	Otros *applets*[1], encontrados en Internet o realizados por el autor, pueden sernos de utilidad. La librería de aplicaciones desarrolladas en Java cada vez es más extensa. Tampoco resulta complicado traducirlas y adaptarlas a nuestros deseos.
	Van Basco's karaoke player es la aplicación elegida para reproducir los archivos midi. Tiene la ventaja de disponer de diferentes ventanas (incluido un teclado) que por sí solas permiten la observación de los patrones musicales y variar el *tempo* o la *altura* de las notas.

[1] Todos los *applets* utilizados son de libre distribución (aunque algunos sólo si es con fines educativos o no comerciales).

UN CUADRO ALEGÓRICO

Non mi legga chi non e matematico

(No me lea quien no sea matemático)

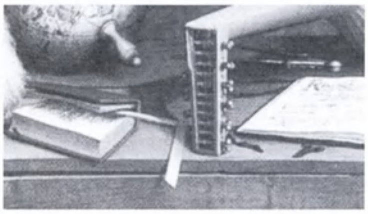
Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci, el hombre renacentista, inventor, pintor, músico, etc., estimaba mucho las Matemáticas. Da Vinci halla en ellas el *rigor* necesario para convertir una *observación* en una *ley universal*.

Da Vinci es posiblemente el inventor de un método de distorsión de la imagen basado en una particular perspectiva. Esta distorsión se conoce como *anamorfismo*.

El anamorfismo se puso rápidamente de moda. Permite a un pintor ocultar una figura en el cuadro, de manera que sólo sea reconocible su forma mirando la imagen desde un ángulo particular o con ayuda de espejos curvos o lentes.

En la obra *Los embajadores*, Hans Holbein "el joven" (1497-1543) representa una escena cargada de símbolos. Además, utiliza el anamorfismo para ocultar la imagen que da un nuevo sentido al cuadro.



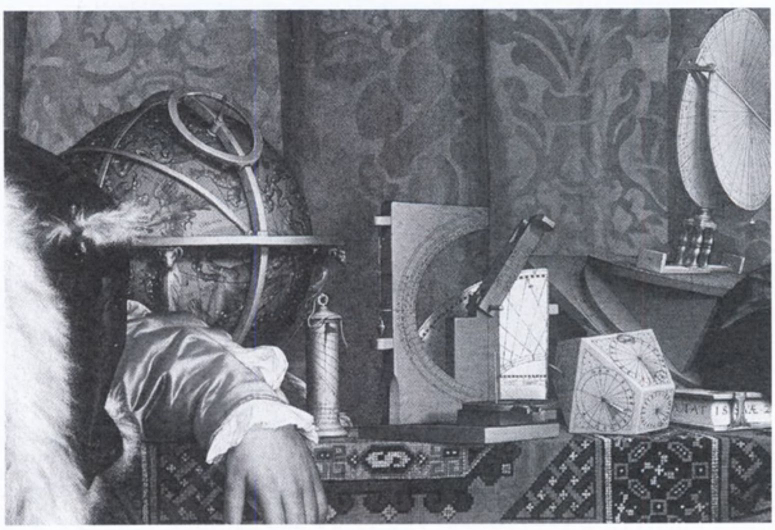
Aparentemente, se trata de una exposición de los poderes terrenales. Un embajador representa el poder político. El otro, el poder de la Iglesia (también político, claro). Detrás, una variedad de objetos representa el poder del conocimiento de las ciencias y las letras (las siete artes liberales están simbolizadas en el cuadro). Aquí se puede ver cómo la escuadra y el compás (Matemáticas) casi tocan al laúd y la partitura (Música).

Sin embargo, la imagen oculta en la parte inferior del cuadro representa...

Pregunta: ¿Qué causa emoción?
Respuesta: *El reconocimiento*

... la vanidad humana: todo ese poder es temporal. Al final, se encuentra la muerte (representada por la calavera).

Recordemos que en esta época **el conocimiento** estaba generalmente reservado a unos pocos, justo aquellos que tenían **poder**: los nobles, los ricos y los eclesiásticos. Es de ellos de los que se ríe Hans Holbein en su cuadro, no del conocimiento mismo.



La siguiente clasificación muestra lo que fue el plan de estudios durante siglos: desde la Antigua Grecia hasta el Renacimiento.

Las 7 artes liberales
- *Quatrivium* (Saberes Exactos)
  - *Geometría*
  - *Aritmética*
  - *Música*
  - *Astronomía*
- *Trivium* (Saberes Humanos)
  - *Gramática*
  - *Lógica*
  - *Retórica*

Las siete artes se dividen en “saberes exactos” (Quatrivium o Matemáticas) y “saberes humanos” (Trivium).

La Música estaba considerada una parte de las Matemáticas.

Matemáticas (el estudio de lo inmutable)			
Cantidad (lo discreto)		**Magnitud** (lo continuo)	
Absoluta **Aritmética**	Relativa **Música**	En reposo **Geometría**	En movimiento **Astronomía**
Quatrivium			

PROPIEDADES QUE COMPARTEN MÚSICA Y MATEMÁTICAS

La primera propiedad, excepcional, que tienen en común la Matemática y la Música es que ambas han desarrollado **lenguajes universales.**

Aprovechando esta universalidad, en 1817 el francés François Sudre creó el idioma artificial **solresol**, que también servía como lenguaje para sordomudos. Así, “sol-la-si” (tres tonos ascendentes) significa subir. “Fa-la” significa bueno, mientras que “la-fa”, significa malo. Lo bueno que tenía este lenguaje, que no prosperó por ser demasiado artificial, es que podía cantarse siguiendo sus propias notas.

La segunda propiedad es que la **teoría física de las ondas** representa un papel fundamental en nuestra percepción de la Música. Y esta teoría puede ser analizable matemáticamente.

La tercera propiedad nos la recuerda Bertrand Russell:

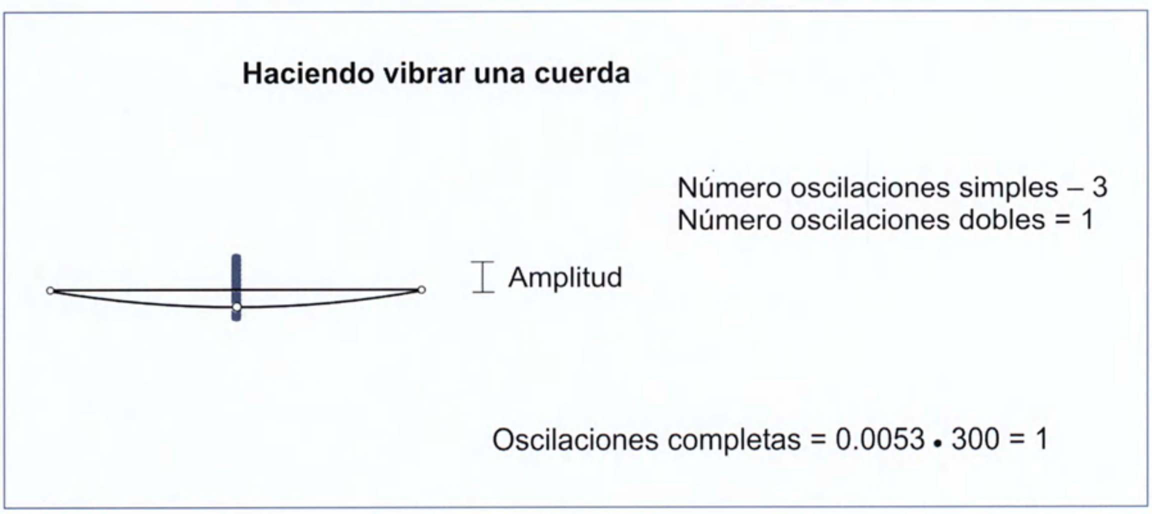
> "...el matemático puro, como el músico, es creador libre de su mundo de **belleza ordenada**".

BUENAS VIBRACIONES

Desde muy antiguo se sabe que una cuerda tensa, al pulsarla, vibra emitiendo un sonido característico. El sonido se produce cuando un objeto vibra. Por ejemplo, cuando una persona habla, el sonido que emite es producido por las vibraciones de sus cuerdas vocales. Cuando tocamos un tambor, un pedazo de madera o de metal, una cuerda de violín, etc., estos cuerpos vibran.

En época de Pitágoras, o probablemente bastante antes, se descubrió que si esa cuerda se sujetaba por la mitad, cada uno de las dos partes en que quedaba dividida la cuerda producía un sonido **consonante** (agradable al oído) con el anterior, pero **más agudo**. Este sencillo pero importante hallazgo es el fundamento de la Música.

Hoy poseemos mucha más información que los pitagóricos sobre la naturaleza y transmisión de los sonidos. Veamos pues qué sucede cuando hacemos vibrar una cuerda. En la siguiente escena interactiva podemos ver una cuerda, sujeta por ambos extremos.



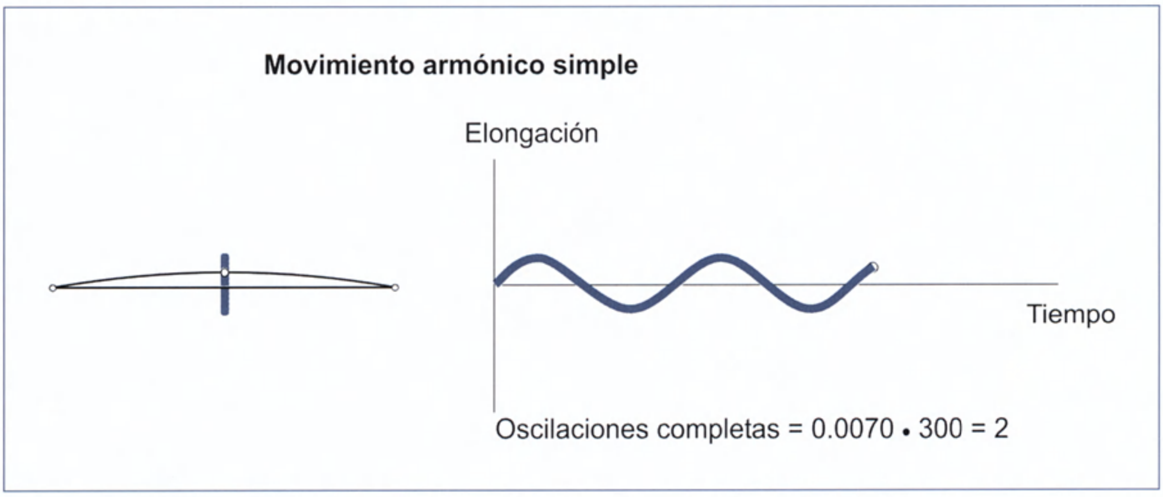
Como vemos, el punto pulsado en la cuerda oscila verticalmente entre dos extremos: realiza un "sube y baja" conocido como **movimiento *armónico* simple**, que es aquel que se obtiene cuando los desplazamientos del punto son directamente proporcionales a las fuerzas causantes de este desplazamiento.

La elongación máxima, es decir, la mitad de la distancia entre los dos extremos, se llama **amplitud**. Al número de oscilaciones completas (dobles) que realiza por segundo se le llama **frecuencia** F, y su unidad es el **hertzio** (hz). Es decir, cuando decimos que el punto oscila a 100 hz, queremos señalar que realiza 100 oscilaciones completas por segundo.

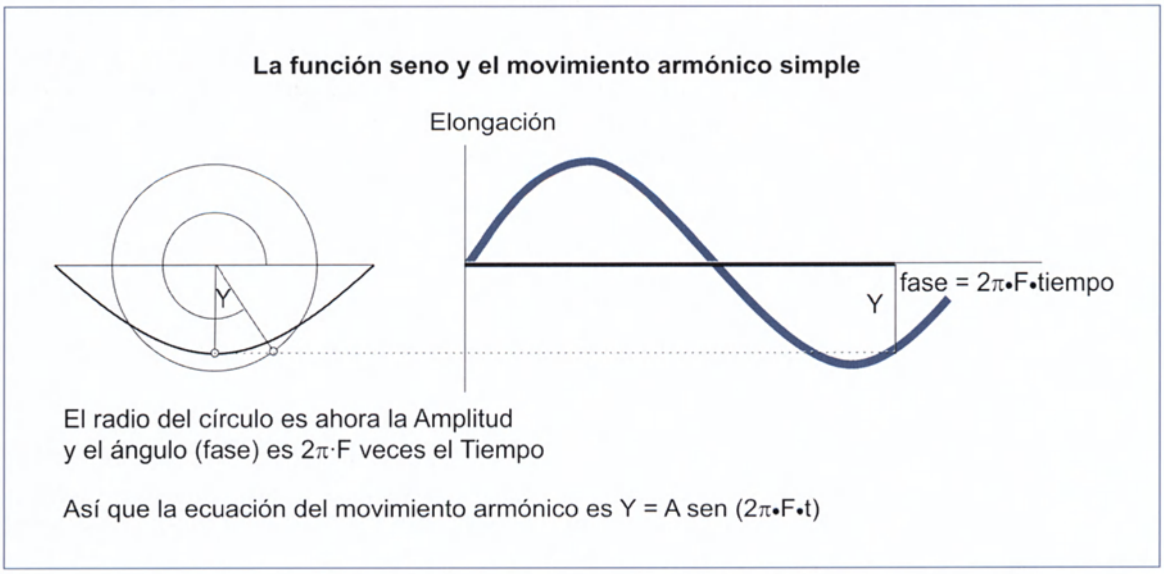
Podemos comprobar en la escena anterior que *la frecuencia es independiente de la amplitud* (los osciladores con esta propiedad se llaman *armónicos*).

Al tiempo que tarda el punto en realizar una oscilación completa se le llama **período** T, por lo que $T = 1 / F$.

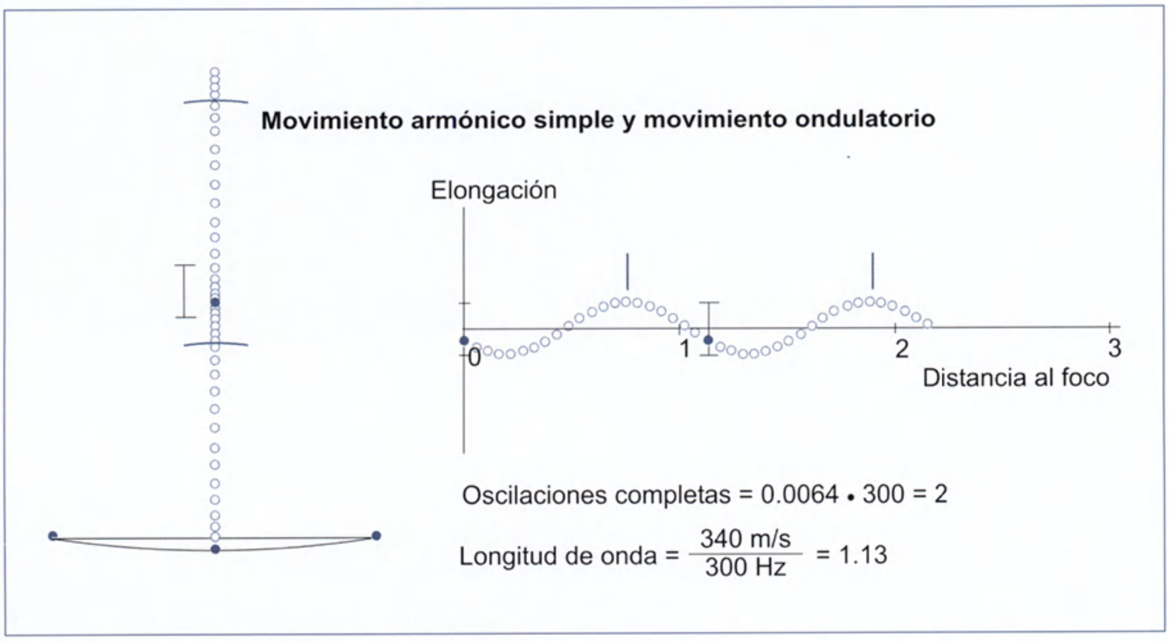
Representemos ahora el movimiento de ese punto **con el paso del tiempo** t, de forma que dos instantes diferentes determinen necesariamente dos puntos diferentes de la gráfica.



La gráfica anterior nos resulta familiar:



En la siguiente escena podemos observar la relación entre el movimiento armónico simple que realiza *cada una de las partículas*, y el **movimiento ondulatorio** que realizan *todas las partículas en conjunto*. También podemos ver, en la izquierda, una representación de las sucesivas y periódicas **condensaciones y rarificaciones** del aire provocadas por los desfases.

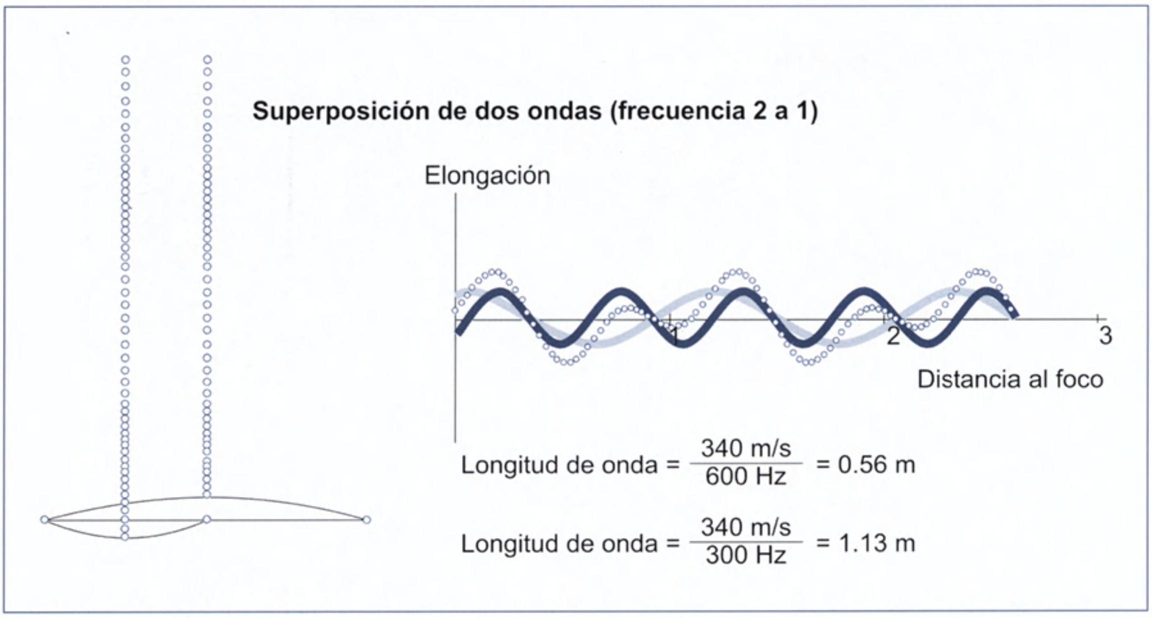


¿QUÉ ES UN SONIDO ARMONIOSO? ¿QUÉ SIGNIFICA CONSONANCIA?

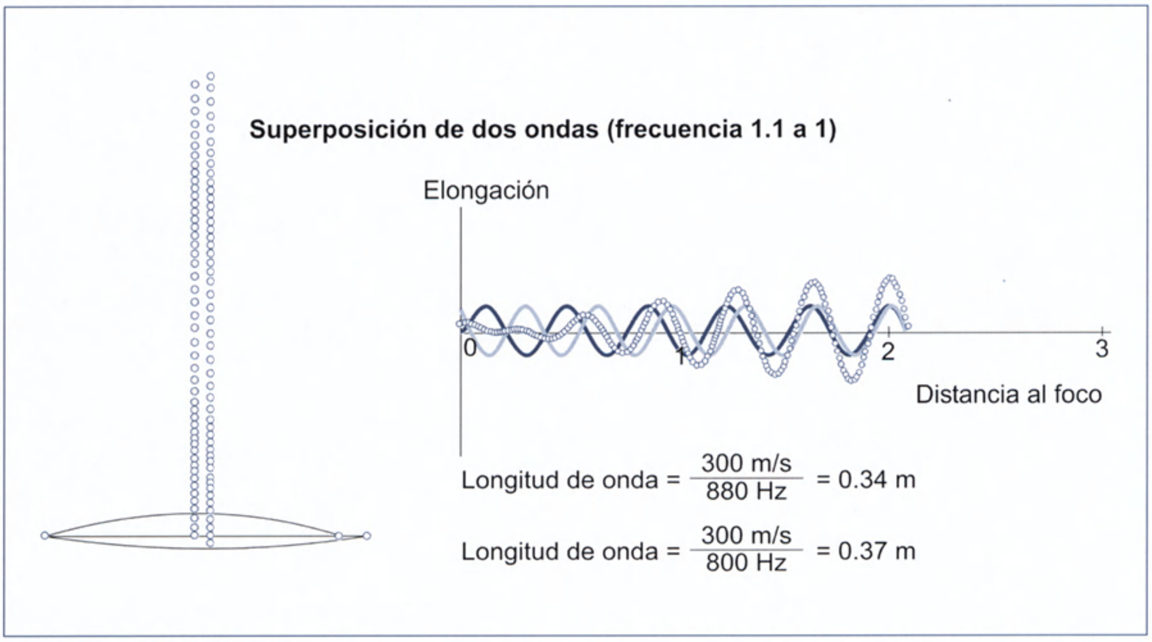
¿Qué sucederá cuando dos ondas de *diferente frecuencia* se superpongan? Imaginemos, por ejemplo, que dos instrumentistas tocan al unísono, produciendo ondas de la misma amplitud. Pero uno de ellos emite una frecuencia de 440 hz, mientras el otro la emite de 450 hz. En esta situación, **no oiremos un sonido constante**. El volumen de los sonidos combinados sube y baja.

Cuando se encuentren dos condensaciones o dos rarificaciones se producirá interferencia constructiva y la amplitud (el volumen) subirá. Pero cuando se encuentre una condensación con una rarificación se producirá interferencia destructiva, por lo que el volumen descenderá. Estas rápidas y periódicas variaciones de volumen se llaman **batidos**.

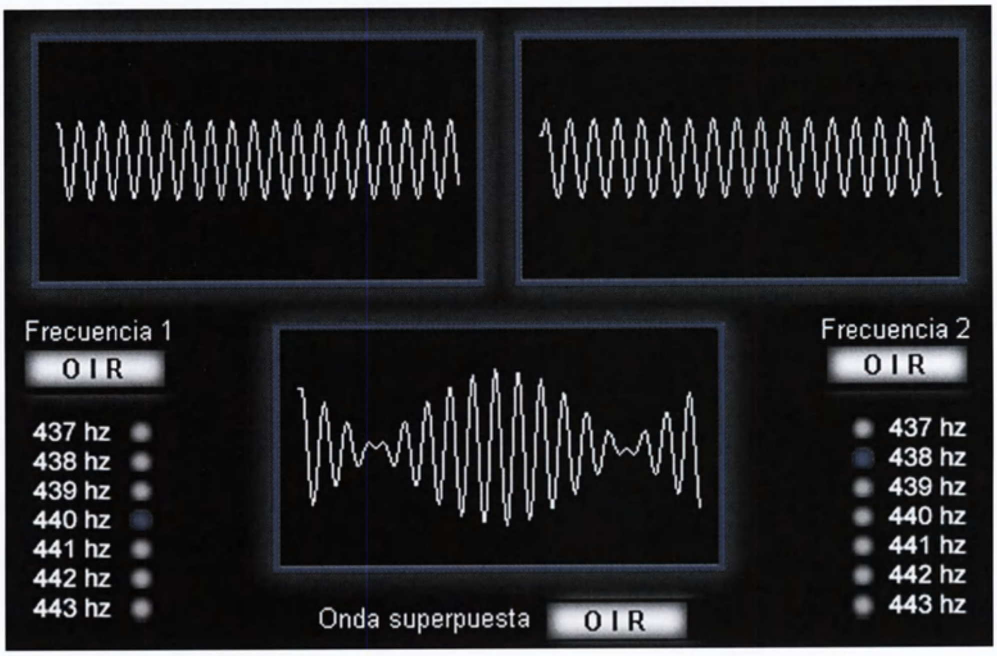
Observemos ahora en la siguiente escena cómo se superponen las ondas que emite una cuerda y su mitad. En las zonas de interferencia destructiva apenas se modifica la forma de la onda, lo que evita que percibamos el batido (este se produce demasiado rápido).



Comparemos la escena anterior con la siguiente, en donde las dos frecuencias están en relación 11:10, es decir, muy próximas (la cuerda mayor es sólo 1'1 veces más larga que la pequeña). La forma de la onda sufre una fuerte modificación, resultando que la onda compuesta adquiere periódicamente valores próximos a cero. Digamos que "ahora oímos, ahora no oímos". Esto provoca un rápido efecto de ***batido***, una ***disonancia***, un *chirrido* desagradable (o tenso) para el oído.



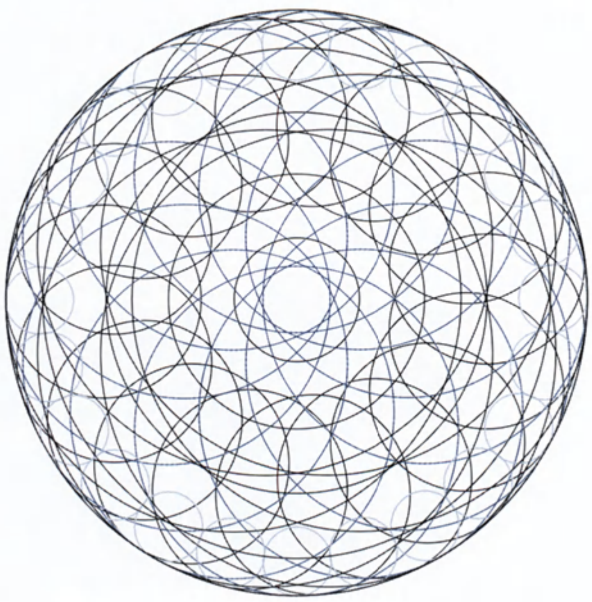
En el siguiente panel podemos jugar con distintas frecuencias cercanas y observar la producción de *batidos*.



PRINCIPIO DE HUYGENS

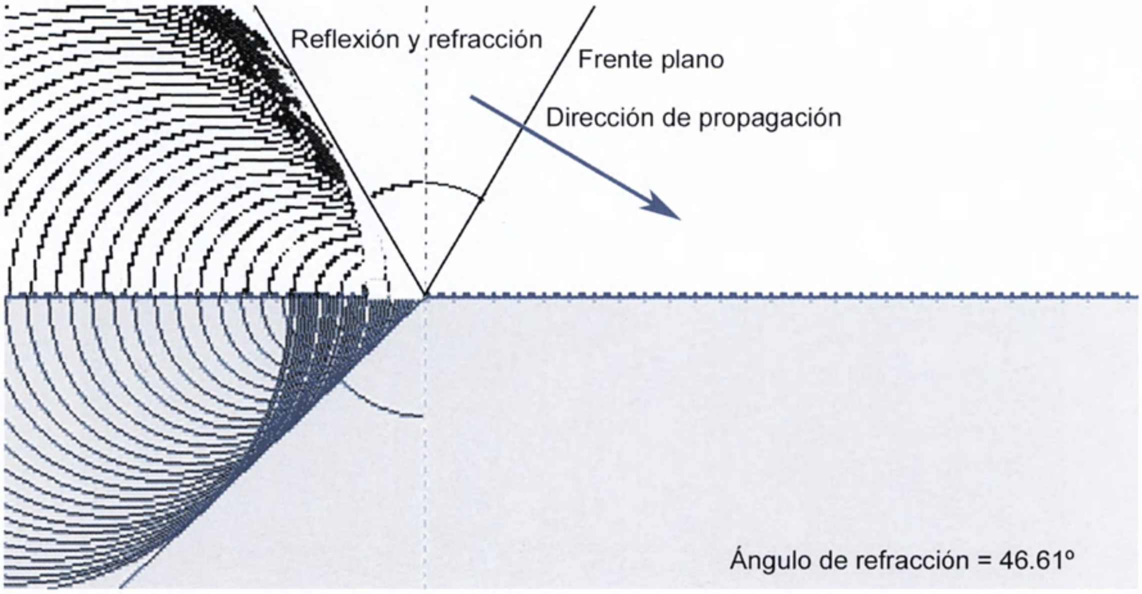
Si conocemos el estado de un frente de ondas en un instante, podemos explicar su avance mediante el siguiente principio, descubierto en 1690 por el científico holandés Christiaan Huygens:

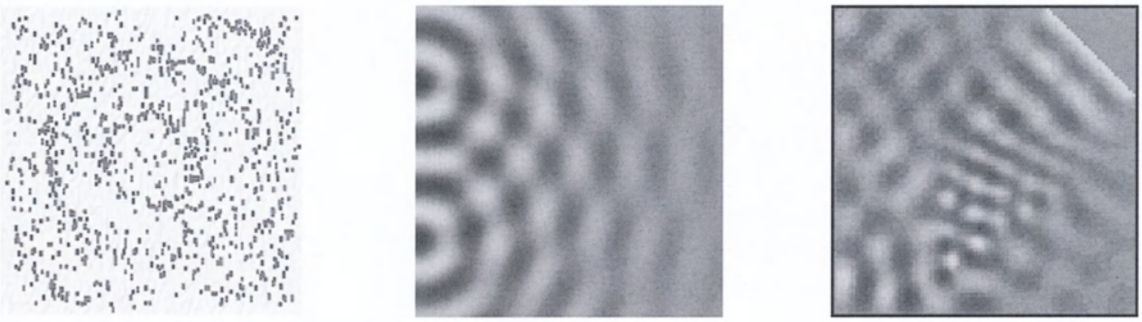
> Todo punto alcanzado por un frente de ondas actúa como fuente de nuevas ondas[2].



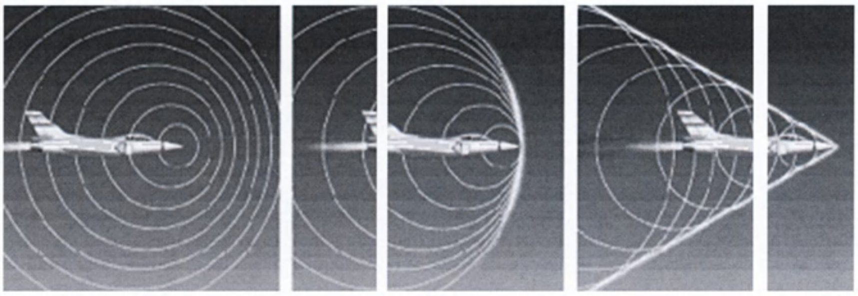
Gracias al principio de Huygens es fácil explicar por simulación el resto de las propiedades físicas del sonido. Por ejemplo, la reflexión y la refracción.

[2] Tengamos en cuenta que sólo en el frente original de ondas todas estas nuevas ondas son realmente activas, pues en los demás puntos unas interfieren destructivamente con las otras de tal forma que su efecto no tarda en anularse.





ROMPIENDO LA BARRERA DEL SONIDO



Cuando una fuente emisora de ondas se mueve más rápido que la onda que emite, se produce una *onda de choque*, un aglutinamiento de las ondas que deja atrás. En el caso de un barco, esta onda es la estela que deja. En el caso de un avión supersónico, ocurre un estallido sónico.

Se dice que se ha roto la barrera del sonido (se ha superado la velocidad "Mach 1"). Mucha gente ha oído el estallido que se produce al romper la barrera del sonido, pero poca gente *lo ha visto*.

Cuando un avión viaja más rápido que el sonido, las ondas sonoras emitidas por el avión no pueden precederlo y se acumulan en forma de cono detrás de él. La presión en el frente puede ser tan grande como para condensar el aire y formar una nube con la misma forma que el frente de ondas.

Cuando el frente de ondas alcanza nuestro oído podemos escuchar todas estas ondas agrupadas en él: es el estallido sónico. Pero, además, justo cuando el avión rompe la barrera del sonido, a veces se forma una nube cónica debido a una brusca condensación del aire.

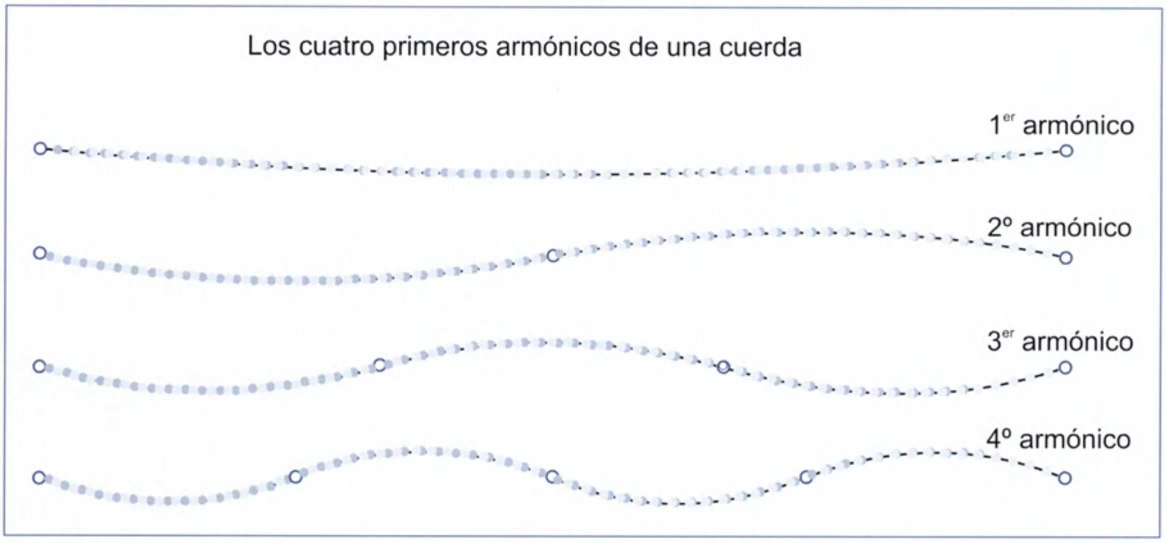
ARMÓNICOS

Cuando un instrumento suena, lo hace con una frecuencia fundamental y múltiplos de ella (armónicos). Una de las claves de la consonancia reside en la coincidencia de estos múltiplos.

Cuerdas (violín, guitarra, piano, etc.)

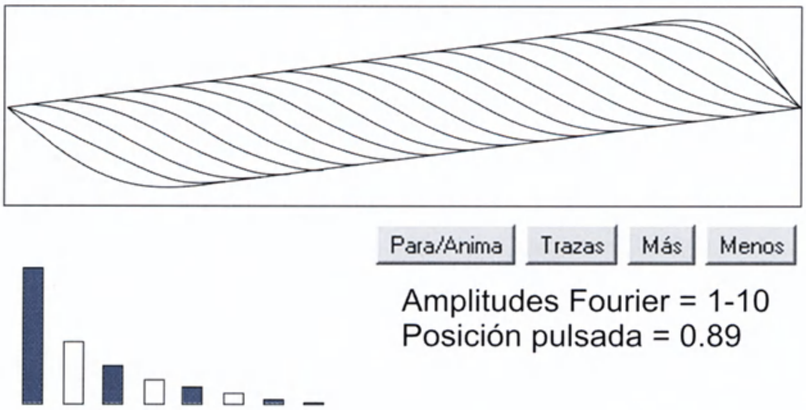
Consideremos una cuerda de longitud L. Al pulsar la cuerda, se produce una onda *transversal* viajera (como las olas), con amplitud A, que recorre la cuerda hasta los extremos. Allí, incapaz de continuar su propagación, se refleja (rebota). Esto ocasiona que dos ondas reflejadas en los extremos viajan una contra otra hasta superponerse en la cuerda.

Cada onda reflejada habrá recorrido dos veces la longitud de la cuerda hasta encontrarse de nuevo en el extremo de partida. Así que la longitud de onda es $2L$.



Habrá puntos (vientres) en donde las dos ondas coincidan en fase, así que la amplitud será el doble. También habrá puntos (nodos) en donde las ondas se encuentren desfasadas 180º, así que la amplitud será cero (no se mueven).

La suma de estas dos ondas reflejadas (iguales pero en sentido opuesto) se llama ***onda estacionaria***. Este nombre se debe a que, al superponerse, las ondas reflejadas parecen dejar de propagarse, convirtiéndose en una oscilación de la cuerda. Es esta oscilación la que se emitirá al aire.



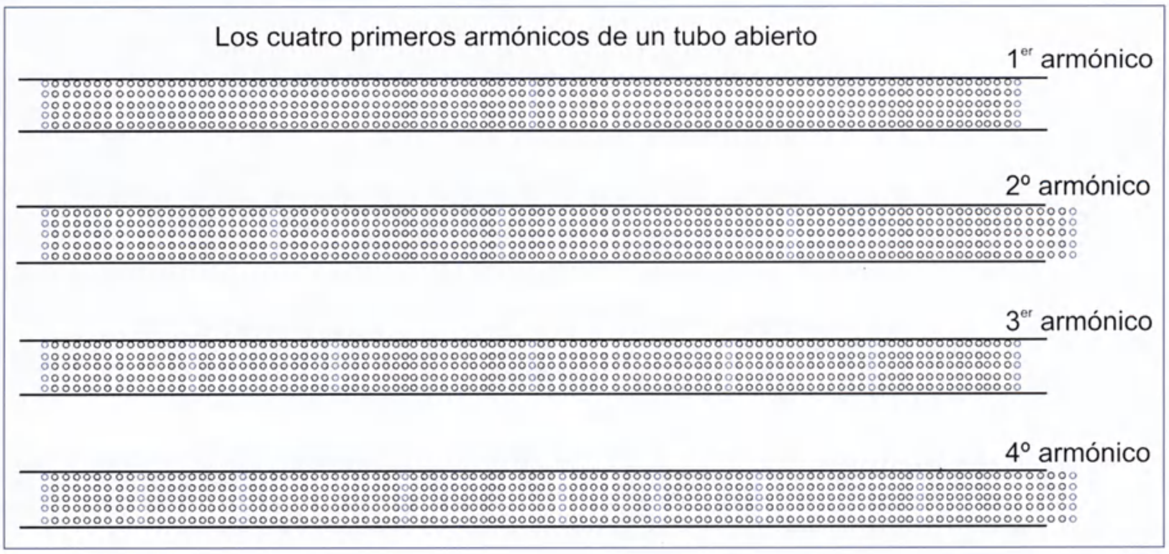
La longitud limitada de la cuerda limita los modos en que esta puede vibrar. Cada uno de estos modos se llama **armónico** (primer armónico o fundamental, segundo armónico, etc.).

Si pulsamos en cualquier punto del rectángulo podemos ver el efecto producido y la amplitud de cada armónico. (De izquierda a derecha, primer armónico, segundo, etc.).

Tubos abiertos

Vamos a ver qué pasa si en vez de una cuerda utilizamos un tubo de longitud *L*. Una corriente de aire proyectada a través de un extremo tiende a romperse a su salida formando turbulencias sin ningún orden, pero si la corriente se hace chocar contra una arista afilada (bisel) las turbulencias se organizan en un orden cíclico regular. La corriente de aire que choca contra la superficie de la arista resbala en un movimiento periódico a uno y otro lado de ésta (frecuencia de bisel), dentro y fuera del tubo, provocando al entrar una serie de compresiones que ponen en movimiento un tren de ondas.

La longitud de onda de cada armónico (modo natural de vibración del aire en el tubo) está determinada exclusivamente por la longitud del tubo. Además, la frecuencia de cada armónico depende únicamente de la longitud del tubo y de la velocidad de propagación de la onda en el aire.

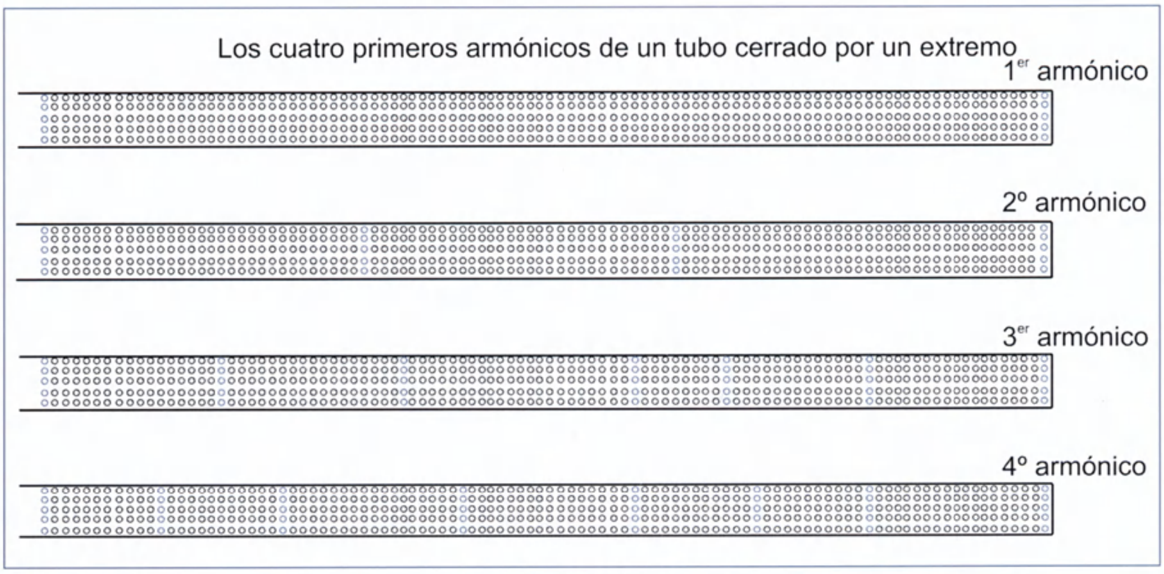


Si el tubo está abierto por los dos extremos, la onda recorre el tubo a una velocidad constante desde el punto de excitación, uno de los extremos abiertos, hasta el extremo abierto opuesto como onda de compresión, y vuelve reflejada en sentido contrario como onda de depresión (enrarecimiento). La distancia recorrida por la onda desde su inicio hasta alcanzar de nuevo la embocadura es la longitud de onda, que está determinada por la longitud del tubo ($2L$).

Partiendo del sonido más grave que se puede obtener con un tubo de longitud determinada, al aumentar la presión de la corriente de aire que choca contra el bisel, el sonido se rompe y salta a otra nota más aguda que la primera. Si seguimos aumentando la presión progresivamente, cada nuevo sonido que obtenemos volverá a romperse saltando a otro siempre más agudo que el anterior. Obtenemos así los distintos armónicos.

Tubos cerrados (órgano, flauta andina)

La onda inicial (longitudinal) recorre el tubo a una velocidad constante desde el punto de excitación, uno de los extremos abiertos, hasta el extremo cerrado opuesto como onda de compresión, y vuelve reflejada en sentido contrario, siempre como onda de compresión. La distancia recorrida por la onda desde su inicio hasta alcanzar de nuevo el agujero de embocadura es entonces media longitud de onda, así que la longitud de onda será cuatro veces la longitud del tubo (4L).

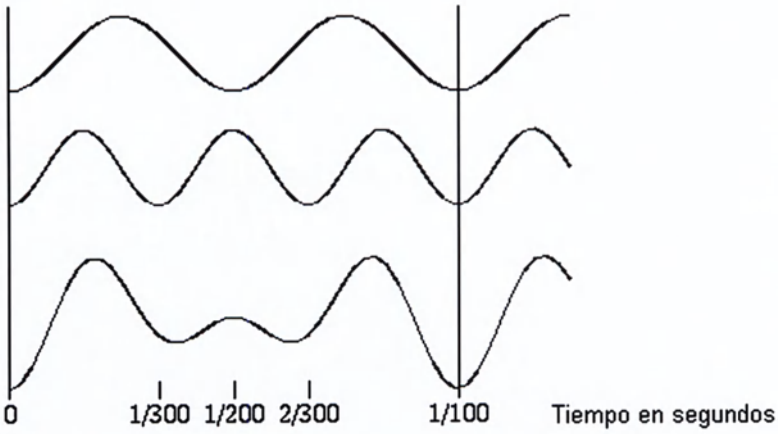


El matemático francés Fourier demostró que toda función periódica puede ser descompuesta en una suma de funciones senoidales.

Por cierto, la imagen de su retrato la podemos ver (comprimida en JPEG) gracias a la transformada inversa creada por el propio Fourier.

Jean Joseph Fourier
(1768-1830)

LA ESCALA DIATÓNICA



La primera onda se repite después de 1/200 de segundo, la segunda después de 1/300, pero la combinación de ambas tarda 1/100 en repetirse.

Por otra parte, la complejidad de la onda resultante añade riqueza de textura al tono.

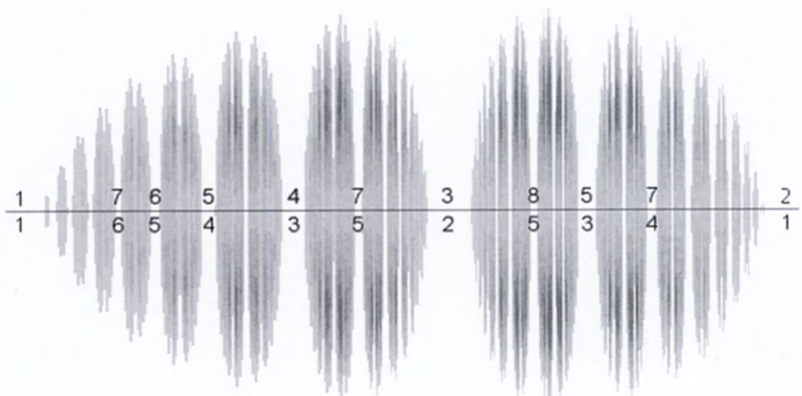
Supongamos ahora que el segundo tono cambia a 309 pulsaciones por segundo. Harán falta ahora 309 pulsaciones del segundo tono y 200 pulsaciones del primero para que ambos vuelvan a coincidir en fase. Esto lleva 1 segundo. En este tiempo, la onda combinada no se repetirá, de forma que el sonido nunca será el mismo en cada fracción de segundo. Además, en este tiempo, surgirán multitud de batidos, que resultan inquietantes al oído.

Generalicemos matemáticamente. Si la primera onda tiene período T1 y la segunda T2, y las dos ondas entran en fase cuando la primera recorre *n* ciclos y la segunda *m* (*n* y *m* enteros), como ha pasado el mismo tiempo para ambas, tenemos que:

$$n\,\mathrm{T1} = m\,\mathrm{T2}$$

O lo que es lo mismo, **F1 / F2 = *n* / *m***

Cuanto más pequeños sean los enteros *n* y *m*, menor será el tiempo que tarda la onda combinada en repetirse. Así que los resultados mejores se obtendrán cuando la proporción entre las frecuencias de las ondas originales se pueda expresar como una fracción de números enteros pequeños. Por ejemplo, 2:1 (**octava**), 3:2 (**quinta**), 4:3 (**cuarta**).



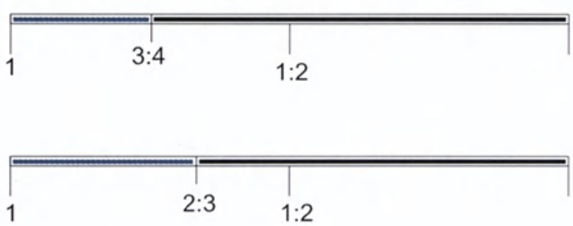
En este gráfico se muestra la percepción de la disonancia según la proporción.

Las proporciones con números pequeños abren grandes intervalos de consonancia.

La escala usual se obtiene tomando las dos primeras como las mejores combinaciones (octava y quinta) y repitiéndolas sistemáticamente hasta que vuelvan a coincidir. Resulta entonces que 12 quintas equivalen (*casi*) a 7 octavas.

$$(3/2)^{12} / (2:1)^{7} = 1'0136...$$

A la diferencia entre estos dos ciclos se le llamó ***coma pitagórica***.

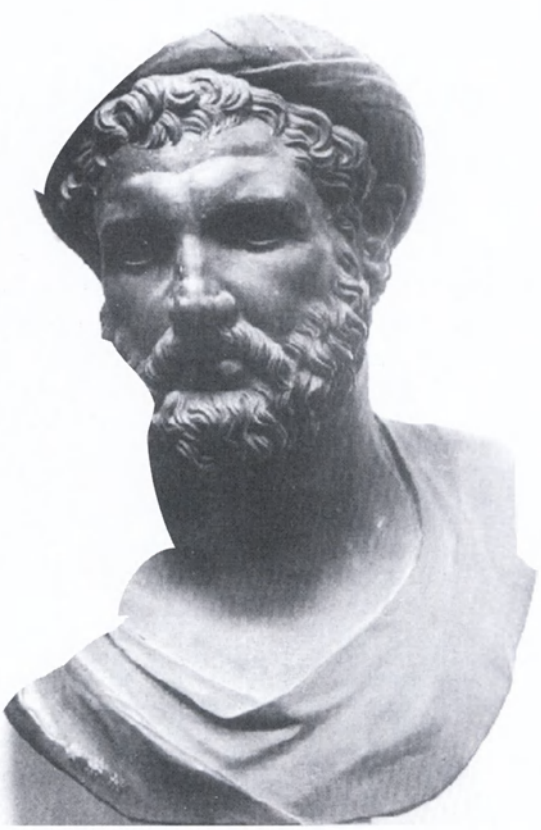


3:4 es la media aritmética de 1 y 1/2

$$1-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$$

2:3 es la media armónica de 1 y 1/2

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{1}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

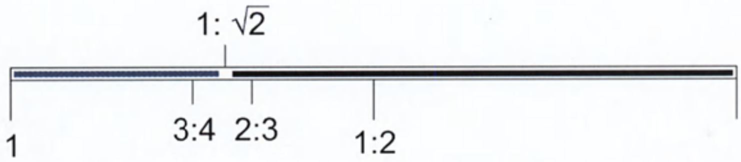


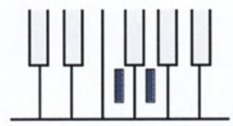
Pitágoras (VI-V a.C.)

Pitágoras no sabía nada de ondas, ni de frecuencias, ni de percepción auditiva. Pero estaba influenciado por sus conocimientos sobre las medias (aritmética, geométrica y armónica) y el misticismo de los números naturales, especialmente los cuatro primeros (*tetrakis*).

Había experimentado que cuerdas con longitudes de razones **1:2** (los extremos 1 y 2), **2:3** (**media armónica** de 1 y 2), y **3:4** (**media aritmética** de 1 y 2) producían combinaciones de sonidos agradables, y construyó una escala a partir de estas proporciones.

A estos intervalos los llamó diapasón, diapente y diatesaron. Hoy los llamamos **octava**, **quinta** y **cuarta** porque corresponden a esas notas de la escala pitagórica diatónica (**do**, re, mi, **fa**, **sol**, la, si, **do**).

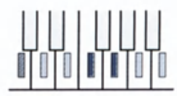




Las tres medias (armónica, geométrica y aritmética) forman una progresión geométrica. Pero, *¿qué le pasó a la media geométrica?* ¿Fue rechazada por su inconmensurabilidad? ¡Correspondía exactamente al **Fa sostenido** de la escala cromática!

En su lugar, usaron la quinta repetidas veces (**ciclo de quintas**). Cada vez que sobrepasaban la octava, multiplicaban por 2 para retroceder a la original.

SOL (por 2:3) > RE (por 2:3) > LA (por 2:3) > MI (por 2:3) > SI



Las longitudes de las cuerdas correspondientes quedan así:

do	*re*	*mi*		*fa*	*sol*	*la*	*si*		*do*
1	8:9	64:81	h	3:4	2:3	16:27	128:243	h	1:2

La proporción entre cada cuerda y la siguiente es de 9:8 (tono), salvo en los casos de *fa/mi* y *do/si*, en donde es de 256:243 (hemitono). La pauta entre tonos y hemitonos es 2-h-3-h.

El problema está en que aplicar dos hemitonos no equivale a aplicar un tono. Esta diferencia (que acumulada a lo largo de las octavas produce la coma pitagórica) condiciona la escala "según la nota en que se empiece" (tonalidad). Por ello, se crean varios modos distintos. Los más importantes, el mayor (a partir de *do*, 2-h-3-h) y el menor (a partir de *la*, 1-h-2-h-2).

Prokofiev compuso a los 7 años su ópera *El gigante*, usando sólo las teclas blancas del piano.

Sergei Prokofiev
(1891-1953)

LA ESCALA CROMÁTICA

En 1627 el matemático francés Mersenne (el de los primos $2^p - 1$) formula con precisión la relación entre longitud de cuerda y la frecuencia en su obra *Armonía Universal*. Esto permitiría la creación de una escala en donde todos los intervalos son iguales (12 semitonos): la **escala cromática**.

Se resolvía así el problema de cambiar de tonalidad (*modular*) sin reajustar la afinación. La coma pitagórica había desaparecido. Eso sí, bajo el coste de eliminar las proporciones justas de quinta y cuarta.

Marin Mersenne
(1588-1648)

do	*do#*	*re*	*re#*	*mi*	*fa*	*fa#*	*sol*	*sol#*	*la*	*la#*	*si*	*do*
2	$2^{11:12}$	$2^{10:12}$	$2^{9:12}$	$2^{8:12}$	$2^{7:12}$	$2^{6:12}$	$2^{5:12}$	$2^{4:12}$	$2^{3:12}$	$2^{2:12}$	$2^{1:12}$	1

<——————— 7 semitonos ———————>

Un siglo después, Bach compone *El clave bien temperado*, que consiste en 24 piezas en las doce tonalidades, usando el modo mayor y menor de cada una de ellas.

Bach demuestra de esta manera las posibilidades de modulación creadas por una afinación igual (aunque él mismo no pudiese ejecutarla perfectamente debido a las limitaciones del clavicordio).

Johann Sebastian Bach
(1685-1750)

Mientras Bach, Handel, Haydn, Mozart, Beethoven, etc., elevaban la Música a alturas de vértigo, dos famosos matemáticos, Euler y d'Alembert, producían teorías de Música, continuando la tradición empezada por Descartes (*Compendio musical*), Galileo (*Discurso*), Mersenne (*Armonía Universal*) y Leibniz (en diversas digresiones). Pero la nueva escala cromática necesitaba nuevas teorías de armonía, en las que trabajaron Euler (*Nueva teoría musical*, en la que trata de ordenar la consonancia, demasiado matemático para los músicos y demasiado musical para los matemáticos) y d'Alembert.

Leonhard Euler
(1707-1783)

Música y Matemáticas ya se estudiaban por separado.

ARITMÉTICA MODULAR

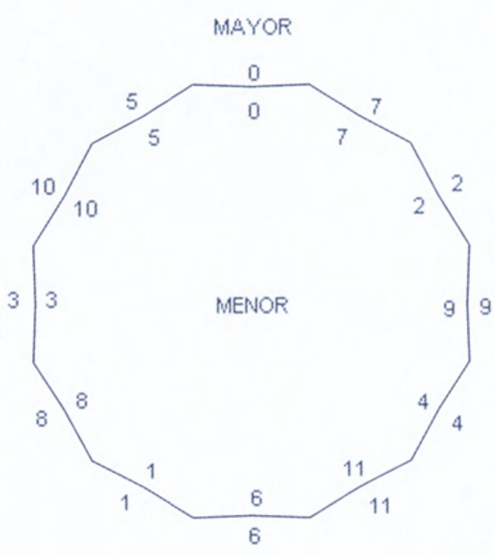
El compositor polaco Chopin describió la fuga como "lógica pura". Era un gran admirador de la obra de Bach. Siguiendo sus pasos, aplicó el principio del contraste, alternando los modos mayor y menor, en su obra *24 Preludios* (op. 28).

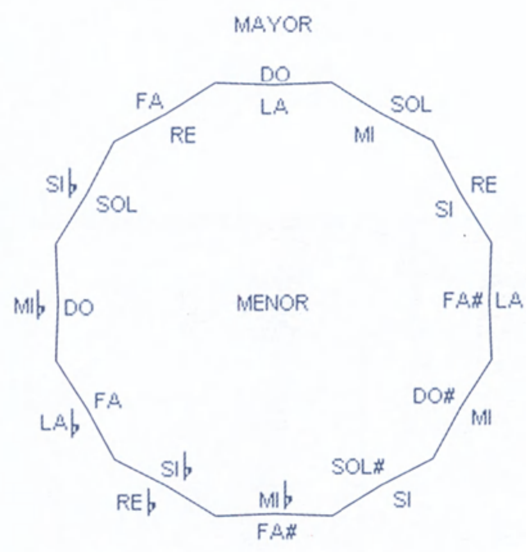
Aunque teóricamente daría igual qué tonalidad se eligiese (los 12 semitonos son iguales), puede que el pianista, inconscientemente, no toque todos con el mismo ánimo, pues la distribución de teclas negras y blancas varía en cada caso.

Las tonalidades de estos preludios de Chopin siguen el orden: Do mayor, La menor, Sol mayor, Mi menor, Re mayor, etc. ¿Qué orden es éste?

Podemos disponer estas 24 tonalidades en un reloj. La parte externa indica el modo mayor y la interna el modo menor. Así expuesto, se ve claramente que Chopin sigue "el ciclo de quintas". Es decir, cada nueva tonalidad está 7 semitonos más arriba que la tonalidad anterior del mismo modo. Matemáticamente, esto equivale a sumar 7 (módulo 12) en sentido horario.

Frederic Chopin
(1810-1849)

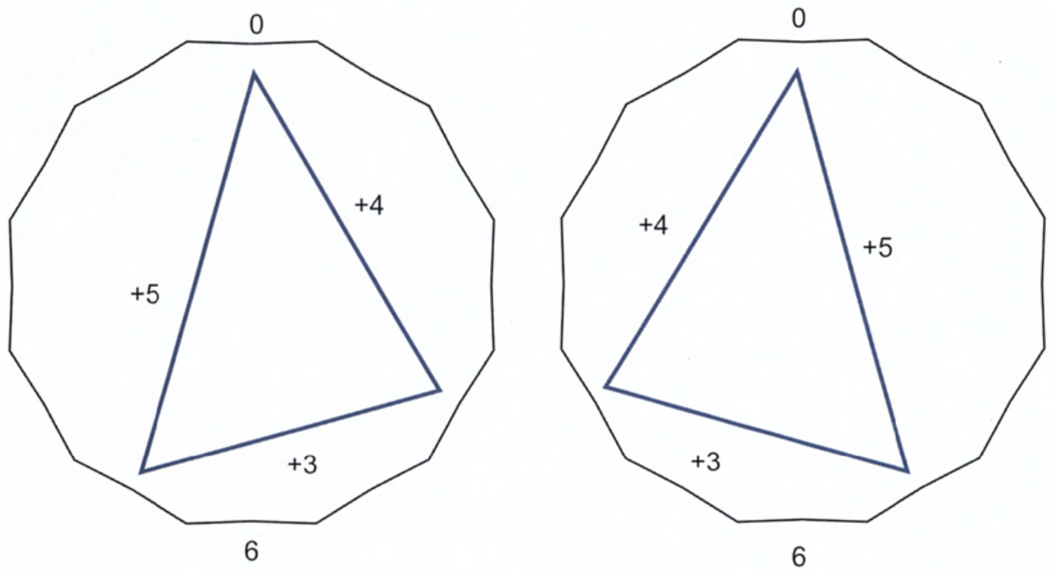




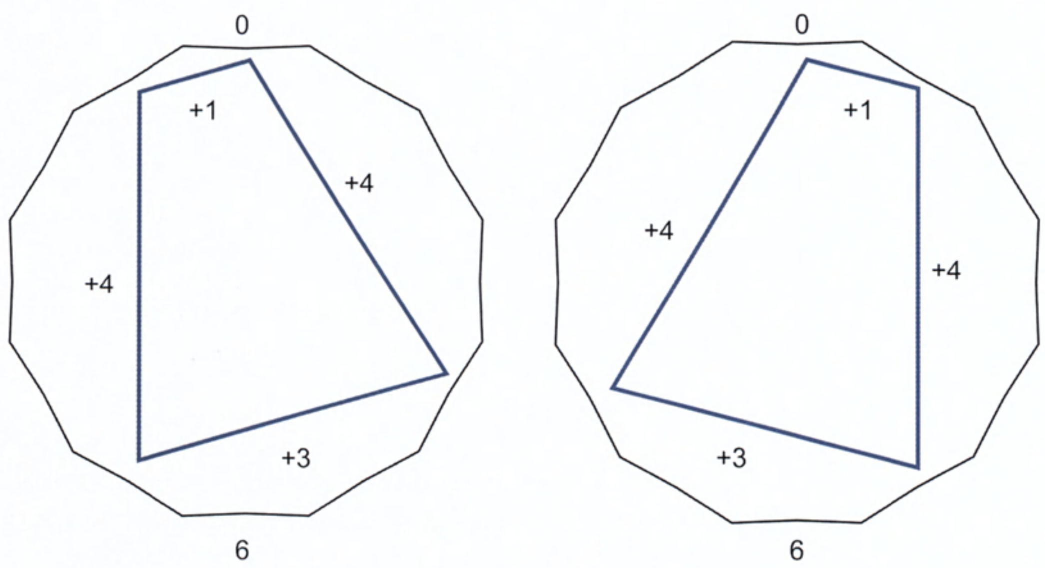
La aritmética modular no es rara. Además del reloj y la escala cromática (módulo 12), la repetición de los días de la semana también es modular (módulo 7). La aritmética interna del ordenador es del tipo "encendido-apagado" (módulo 2).

Un reloj similar al anterior, pero ahora con las 12 notas en su orden habitual, nos sirve para poder apreciar las simetrías que se producen cuando invertimos los intervalos musicales. Podemos distinguir tres tipos de simetría:

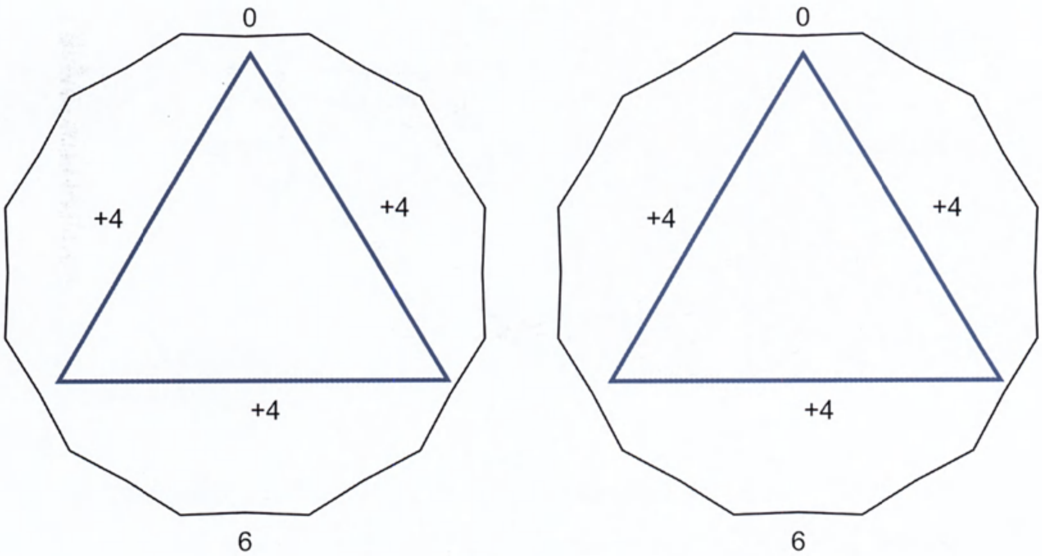
Simetría simple (ni los intervalos ni las notas se corresponden):



Simetría isométrica (las notas no se corresponden pero sí los intervalos):



Simetría enarmónica (al invertir los intervalos obtenemos una copia del original):



REPETICIÓN, SIMETRÍAS Y PATRONES

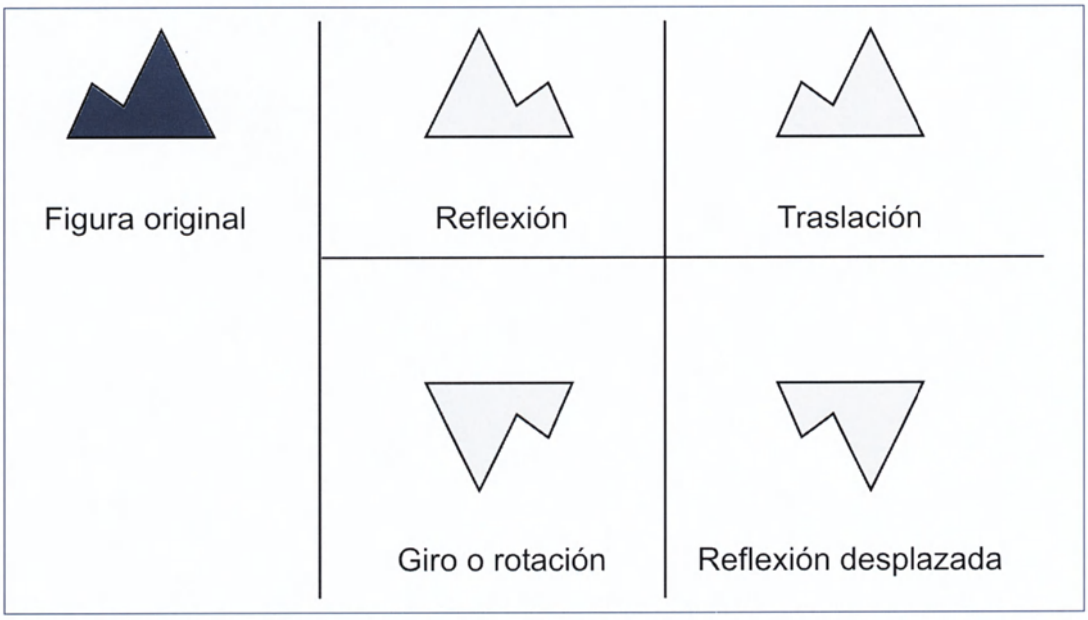
> La repetición no continúa indefinidamente en su manifestación física, pero nos ofrece una imagen del infinito que en potencia contiene.

La repetición es probablemente el procedimiento más usado en Música. La repetición constante puede causar un efecto hipnótico. También puede provocar una adaptación del oído, como cuando dejamos de percibir el sonido de una lámpara fluorescente.

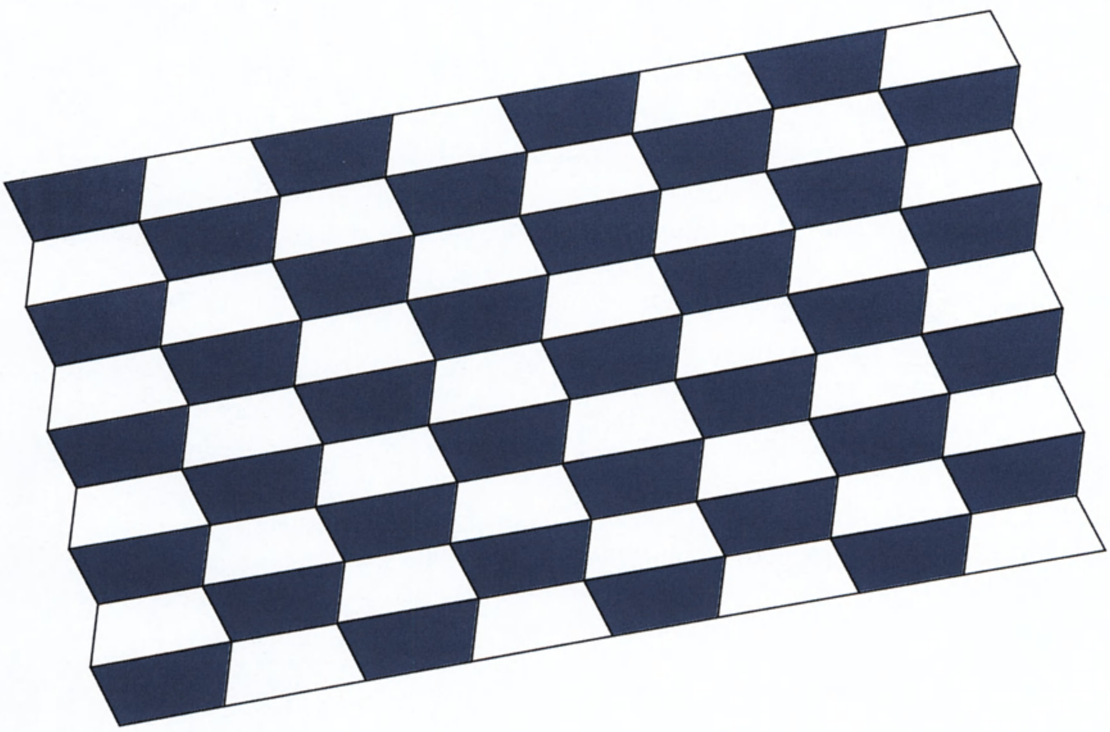
Las oberturas de Rossini son un ejemplo de traslación melódica. Las frases se repiten, cada vez con más intensidad (crescendo), provocando la expectativa de continuación. El clímax se alcanza rompiendo la traslación.

> La combinación de simetría y asimetría es el principio básico de la Música, pues sólo así se puede conjugar unidad y libertad.

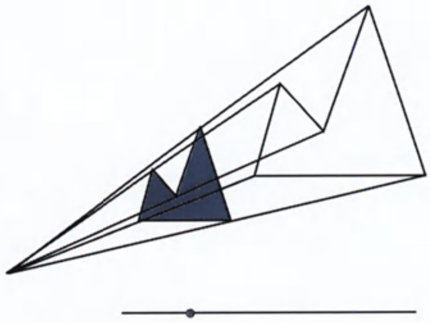
Gioachino Antonio Rossini
(1792-1868)

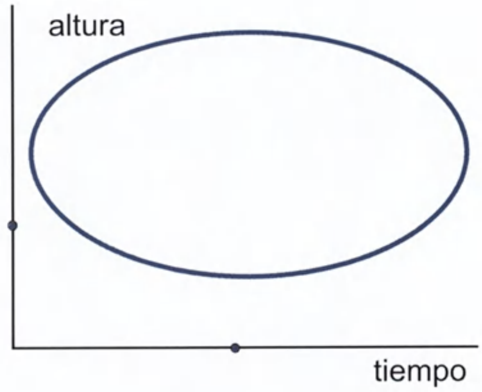


Las simetrías permiten trasladar un motivo a lo largo del tiempo (Música) o del espacio (teselados). En la siguiente escena, podemos mover los vértices del cuadrilátero central y comprobar que, gracias a las simetrías, un cuadrilátero cualquiera siempre tesela el plano.



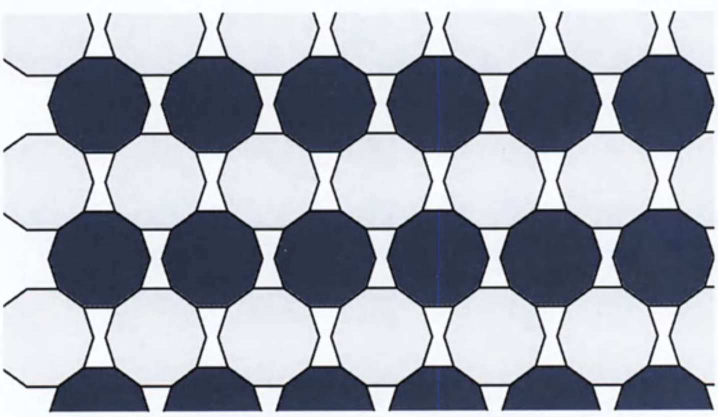
Además de las simetrías existen otras operaciones muy conocidas por los matemáticos, como la homotecia o el cambio de escala.

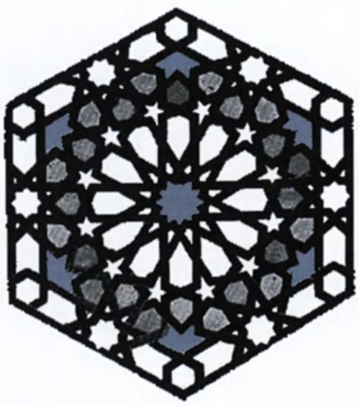


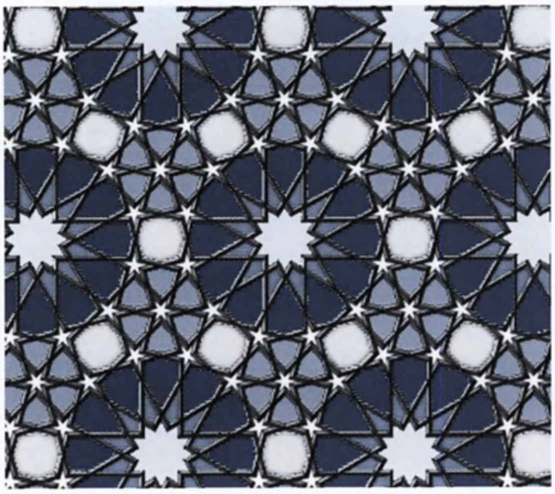


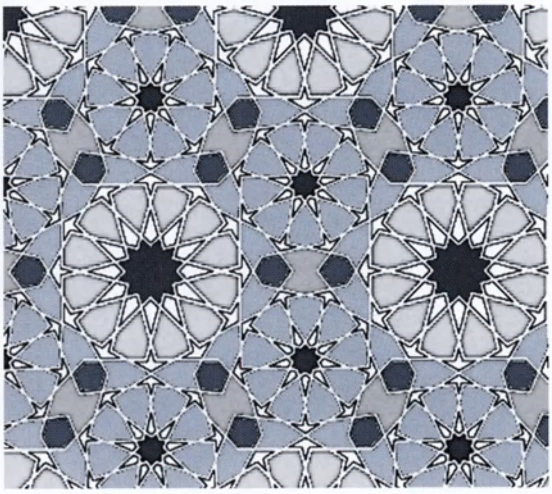
La característica fundamental de la simetría musical es la repetición.
Todos los tipos de simetría son formas de repetición.

Al superponer diversos teselados o patrones simples, se enriquece el diseño. Al tener prohibida la representación figurativa, el arte musulmán se especializó en este tipo de creaciones.







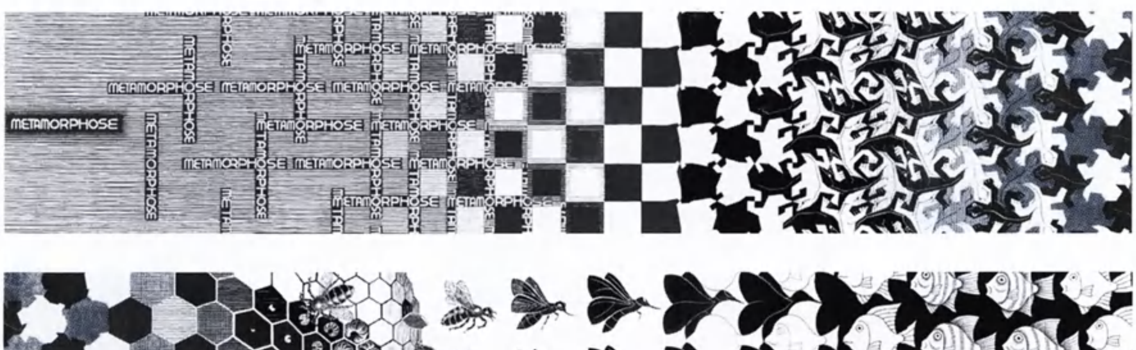


Maurits Cornelis Escher
(1898-1972)

"Para mí sigue abierta la pregunta de si mi trabajo pertenece al reino de las Matemáticas o al del arte."

El trabajo gráfico de M. C. Escher estuvo muy influenciado por los diseños de arte musulmán que descubrió visitando Granada.

Su obra *Metamorfosis* es un ejemplo visual perfecto de las diversas transformaciones melódicas y armónicas que caracterizan una composición musical. En esta obra la mirada del espectador debe recorrer el cuadro de izquierda a derecha, en un proceso de transformación *en el tiempo* (como una película).



Reflexión de la altura en la melodía

Reflexión de la altura en el acorde

Reflexión del ritmo en el tiempo

a tempo ---- accel. ---- decel. ---- a tempo

Reflexión de la intensidad en el tiempo

p < f > p

Rotación de la altura en el tiempo

Traslación y reflexión de la altura en el tiempo

Reflexión con homotecia en la duración (disminución)

Reflexión con homotecia en los intervalos (compresión)

Traslación en el *Estudio Opus 10, nº 12*, Chopin

Bach: Trias Harmonica

Homotecia en la duración, *Sonata para piano Opus 90*, Beethoven

Fragmento palíndromo de la *Sonata nº 4 para violín y piano*, Haydn

Reflexión desplazada en la gigantesca *Sonata Hammerklavier Opus 106*, Beethoven

(la imagen reflejada aparece ¡al cabo de 132 compases!)

Rizando el rizo

En la siguiente composición, Mozart parte de un punto de rotación en el centro de la partitura y agrega notas hacia ambos extremos. Esto le permite crear un "dueto de mesa" en donde la partitura debe colocarse entre dos pianos enfrentados y tocarse al unísono. La misma partitura es interpretada así de dos formas diferentes a la vez. La rotación sobre el centro permite conservar la armonía entre los dos pianos.

Mozart Table Duet (I)

Mozart Table Duet (II)

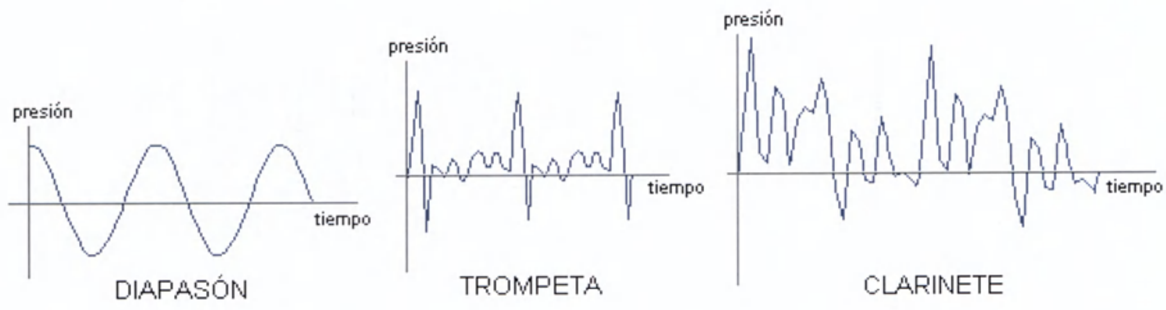
Nota: ahora los sostenidos van después de las notas.

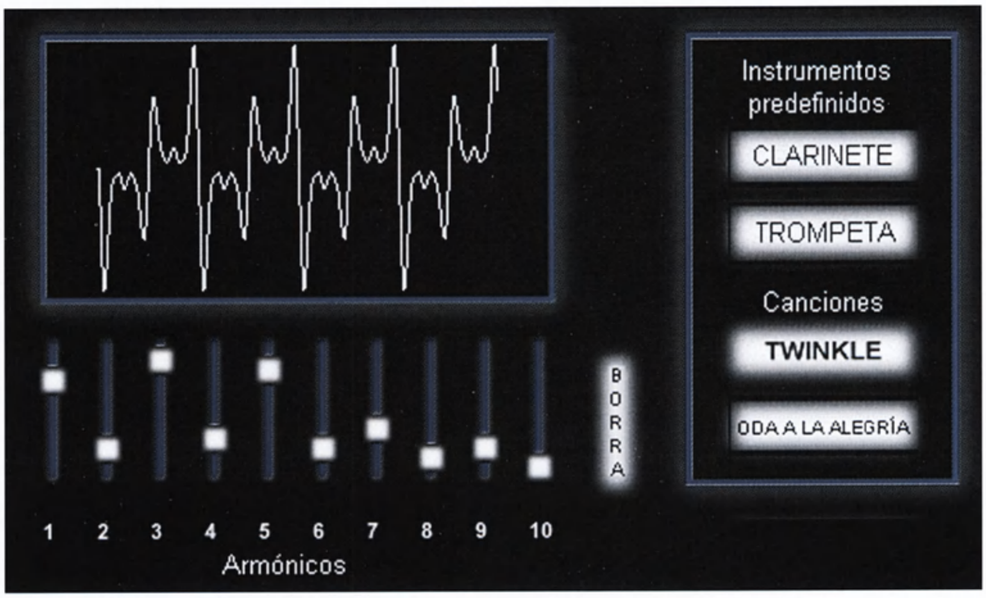
EL TIMBRE DE LOS INSTRUMENTOS

Imaginemos que oímos una flauta y después una trompeta emitiendo la misma nota. Podemos distinguir fácilmente ambos sonidos. La razón es que, aunque emiten la misma frecuencia fundamental, emiten además otras frecuencias secundarias que se unen a la primera con diferentes intensidades.

Las frecuencias (incluida la fundamental) que emite a la vez el instrumento se llaman *armónicos.* Las distintas intensidades con las que cada instrumento emite estos armónicos forman, en conjunto, el sonido completo que oímos. Esta cualidad se conoce como *timbre* del instrumento.

El espectro (timbre) de un instrumento tocando "re" es la traslación del mismo espectro tocando "do". Este es un caso especial de traslación de la altura. Por lo tanto, una línea muy fina separa el timbre de la armonía.



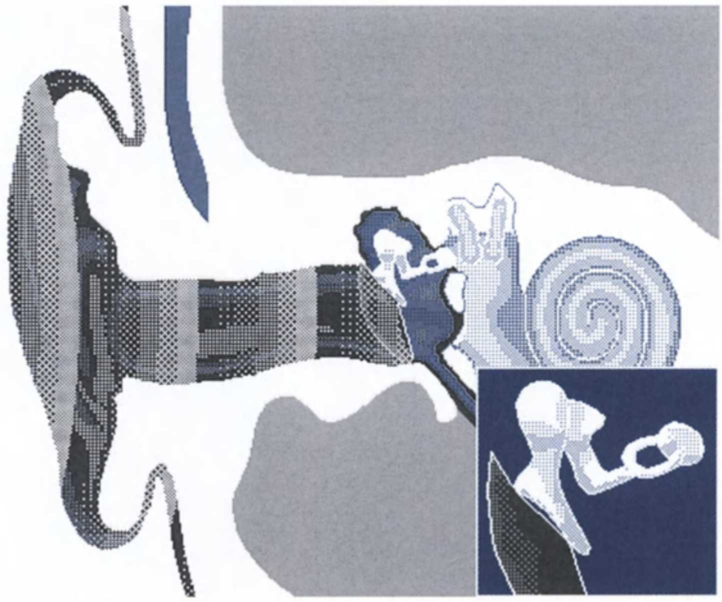


En la creación de los instrumentos se resaltan aquellos armónicos naturales que le confieren timbre propio. En la imagen, el grupo argentino *Les Luthiers* tocando con sus instrumentos *informales* obras de '*Johann Sebastian Mastropiero*'. Podemos oír algunos.

Violín de lata o Latín	Cello Legüero
Contraguitarrone da Gamba	Basss-pipe a vara
Tubófono parafínico-cromático	Gom-horn
Kazzo da casa	Yerbatófono d'amore
Dactilófono	Vals del segundo

Teorema de Thales, Op. 48

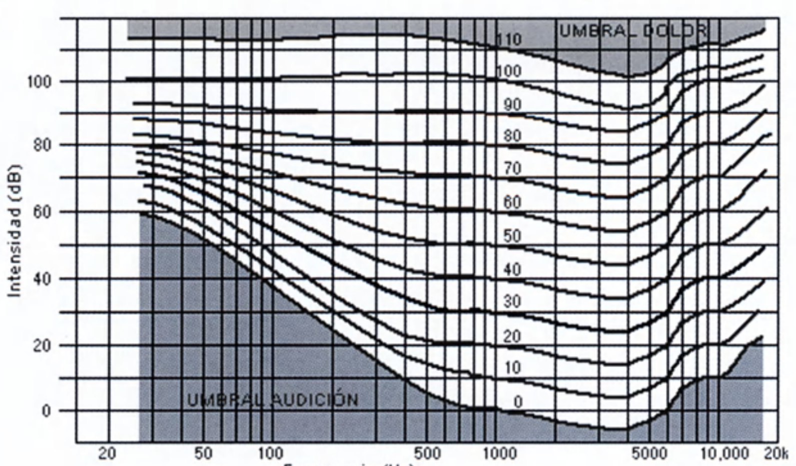
LA PERCEPCIÓN



El nivel de intensidad sonora es una medida objetiva de la intensidad del sonido, pero está lejos de representar con precisión lo que realmente se percibe. Esto se debe a que **la sensibilidad del oído depende fuertemente de la frecuencia**.

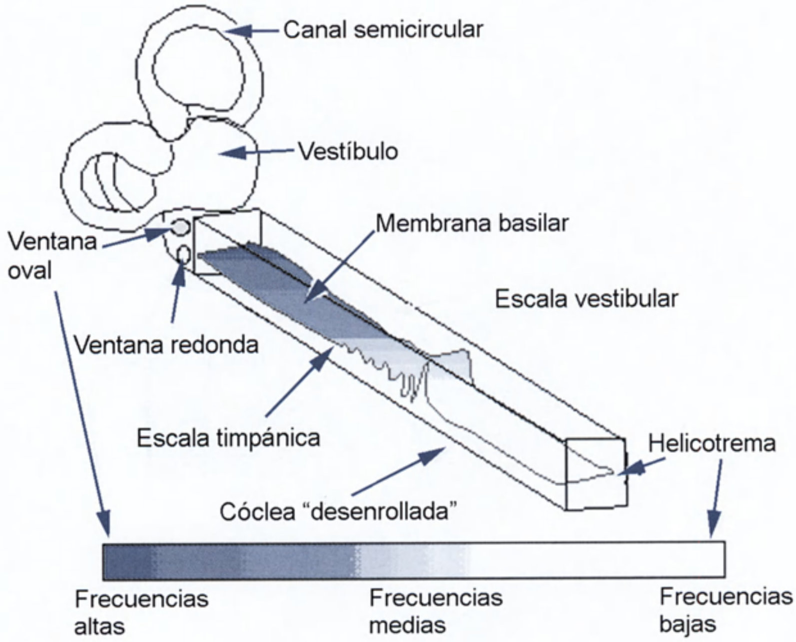
En general, hace falta menos intensidad para oír un sonido agudo que uno grave. Mientras que un sonido de 1.000 hz y 0 dB ya es audible, es necesario llegar a los 50 dB para poder escuchar un tono de 50 hz, aunque sólo un 1 por ciento de las personas puede oír esta frecuencia a tan bajo volumen.

Nuestro oído es más sensible a unas frecuencias que a otras



Gráfica de Fletcher y Munson

La línea que marca el umbral de audición recoge los datos de los que tienen un oído muy fino. El umbral de audición de la mayoría de las personas sigue la línea azul. La línea que marca el umbral de dolor varía poco, salvo alrededor de los 4 Khz, que es la zona en donde el oído humano se muestra más sensible[3].



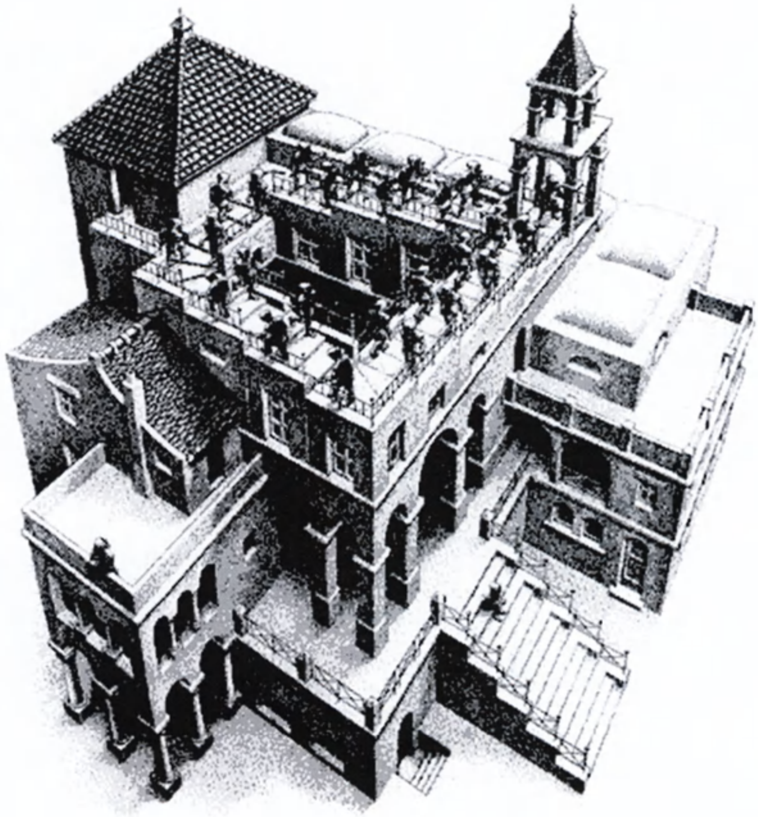
La cóclea

La *membrana basilar* varía en grosor y elasticidad. Ante una frecuencia determinada se estira hasta entrar en resonancia. La parte de la membrana que entra en resonancia depende de la frecuencia. Así, podemos separar las distintas frecuencias contenidas en una única onda.

¡Por eso podemos distinguir distintos instrumentos que tocan a la vez, así como los distintos armónicos de cada uno!

[3] Observemos que la escala de frecuencias (en hercios) sitúa a igual distancia las sucesivas potencias de diez. A este tipo de escalas se les llama ***escalas logarítmicas*** y se utilizan cuando la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo es muy grande.
Cada curva de la gráfica parte de la percepción de volumen que tenemos de una intensidad (por ejemplo de 40 dB) cuando la frecuencia es de 1.000 hz. Después, variamos la frecuencia y registramos en la gráfica las variaciones necesarias de intensidad para mantener constante nuestra percepción de volumen.

Ilusiones acústicas



Al igual que se puede utilizar la perspectiva óptica para engañar a los ojos (como en la famosa *Escalinata de Penrose*, que da más y más vueltas sin perder altura), la perspectiva acústica puede engañar nuestros oídos.

Aquí podemos apreciar el *efecto Shepard*.

Nos parece estar oyendo una subida continua en la altura sonora, mientras que la realidad es que no nos elevamos en absoluto. El engaño se produce porque cada nota es en realidad un acorde compuesto por la misma nota en distintas octavas. A pesar de lo maravillosamente que funciona nuestro oído, esto consigue engañarlo.

El contexto en las disonancias

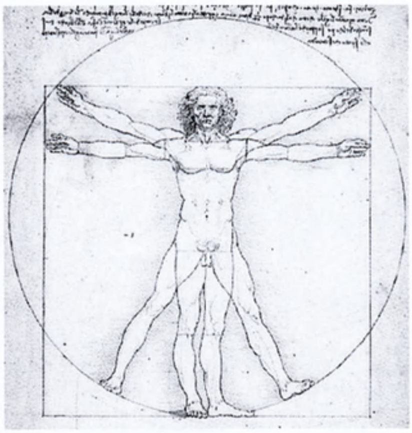
El acorde de la figura es uno de los más disonantes que se pueden encontrar en una partitura. En solitario, suena bastante chirriante. Sin embargo, en una composición las notas adquieren nuevas propiedades según el discurso de la línea melódica. Pasa lo mismo que en la lengua hablada o escrita: el significado de cada palabra depende en gran medida de toda la frase.

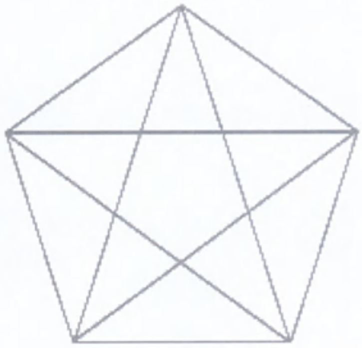
El acorde anterior suena bastante mejor si preparamos antes al oído para su acogida:

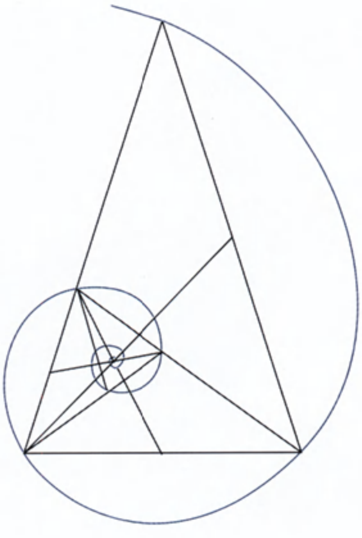
De nuevo, en la repetición está la clave. En su *Quinta Sinfonía*, Beethoven repite varias veces el famoso tema "ta-ta-ta-tá". Con ello está enseñando al oído cuál va a ser la pauta sobre la que gire la composición. Sólo entonces empieza a variar el tema, aunque siempre recordando el patrón fundamental.

LA SECCIÓN ÁUREA

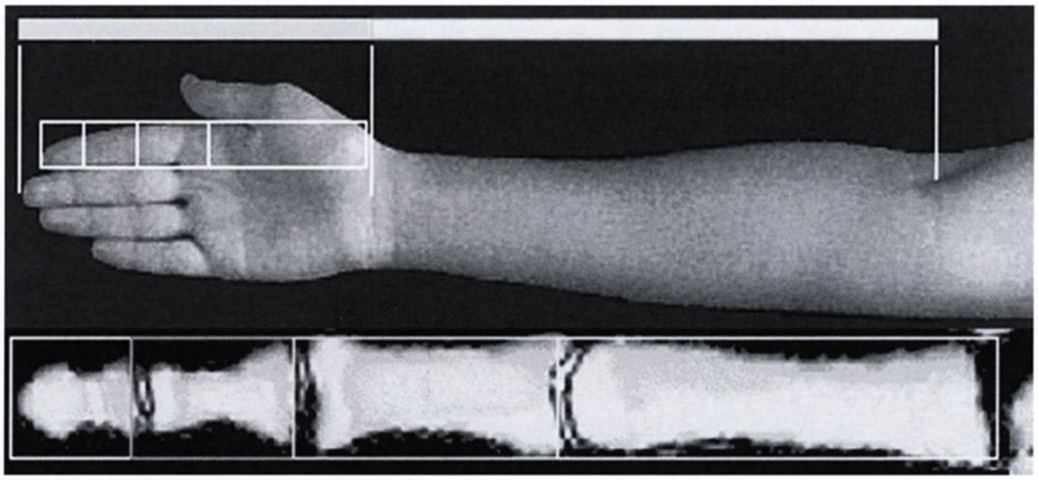
Si deseamos que la parte menor sea a la parte mayor como ésta al todo, la proporción que buscamos es necesariamente la razón áurea.

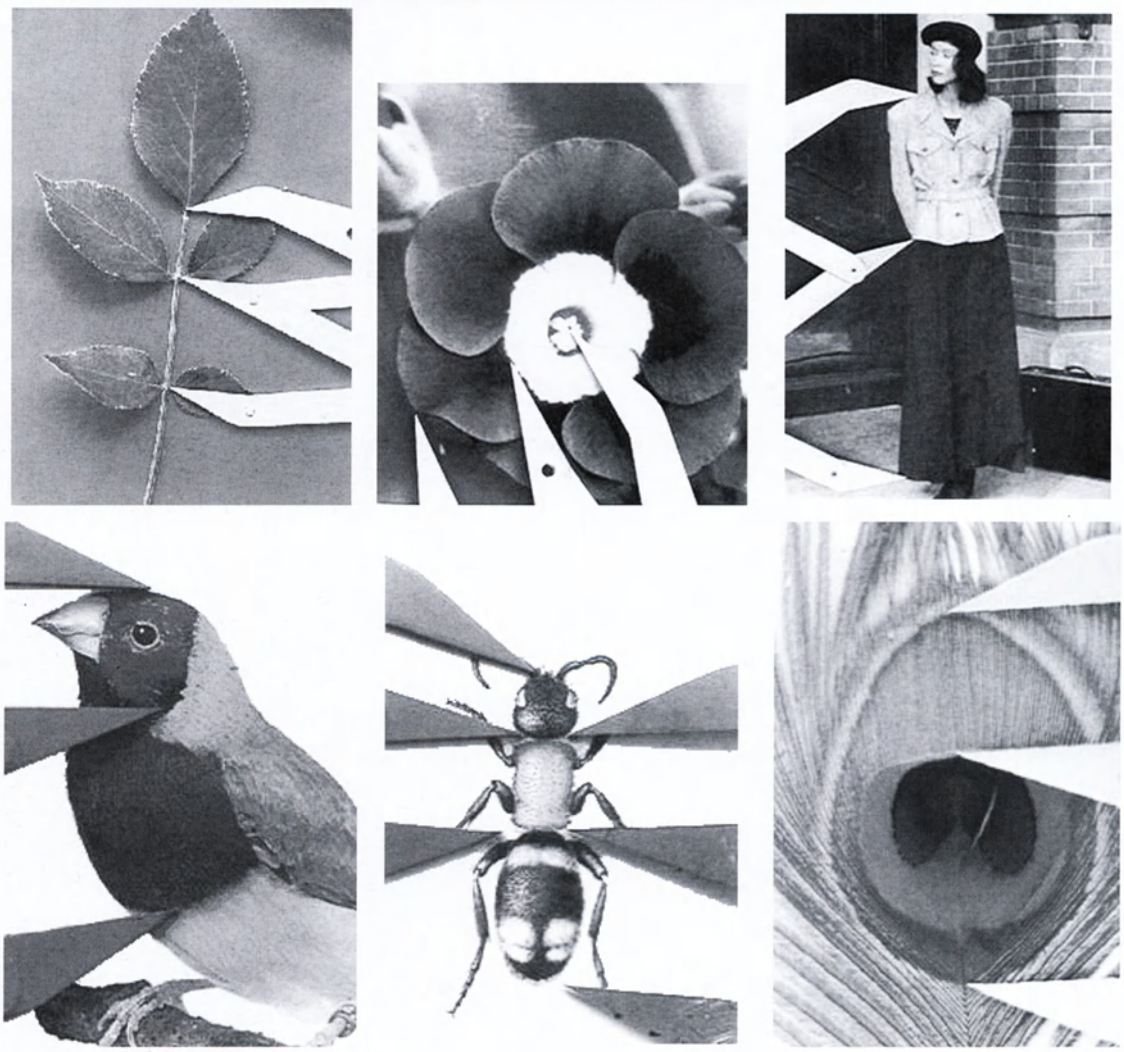


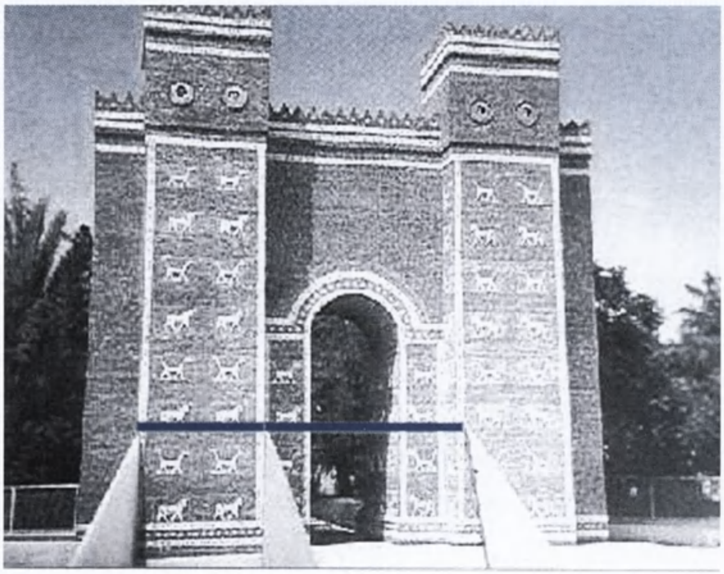




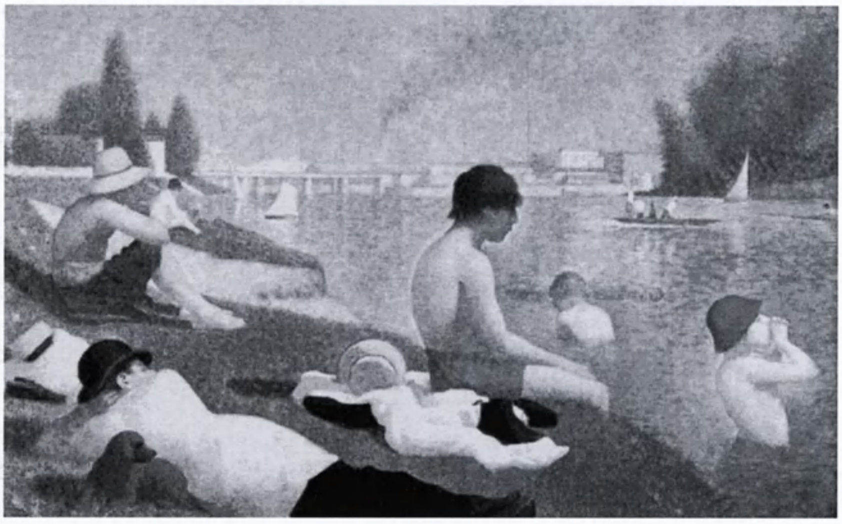
La proporción áurea se encuentra en la naturaleza y en las creaciones humanas.

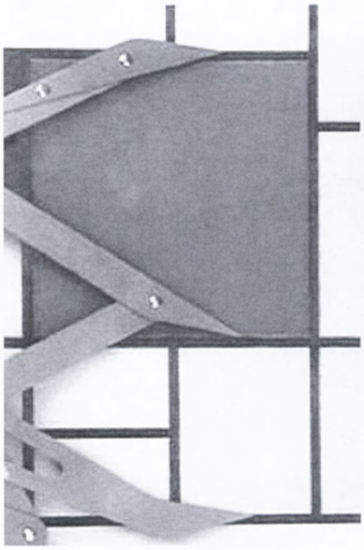


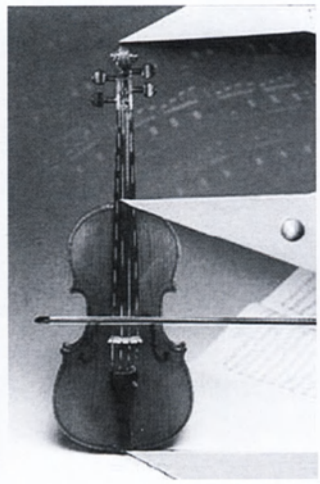


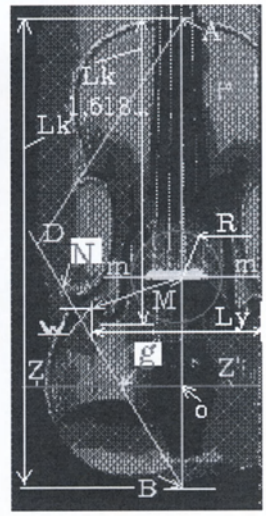


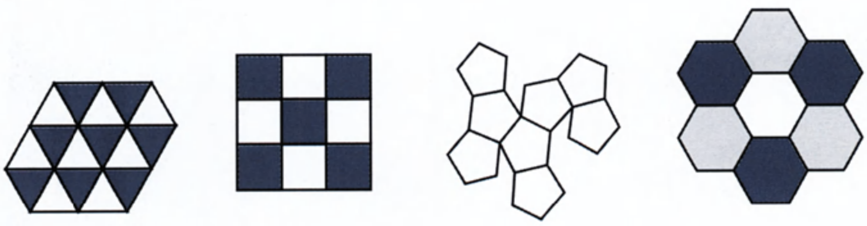

INRI



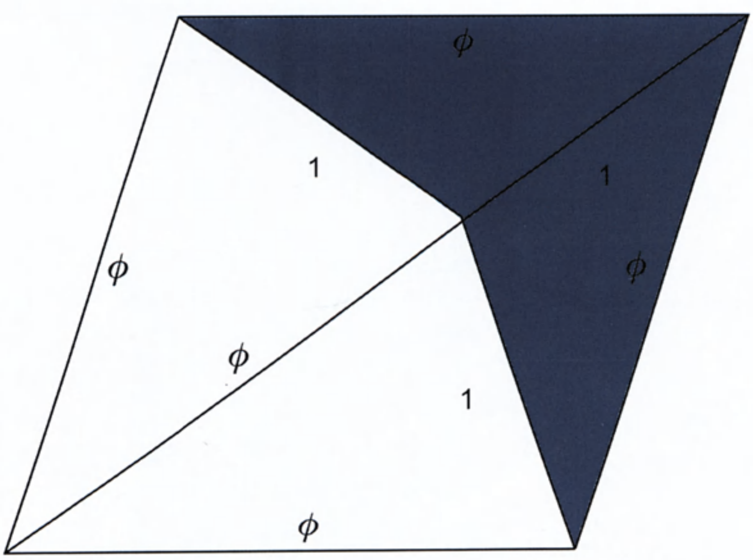


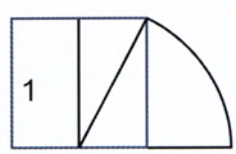


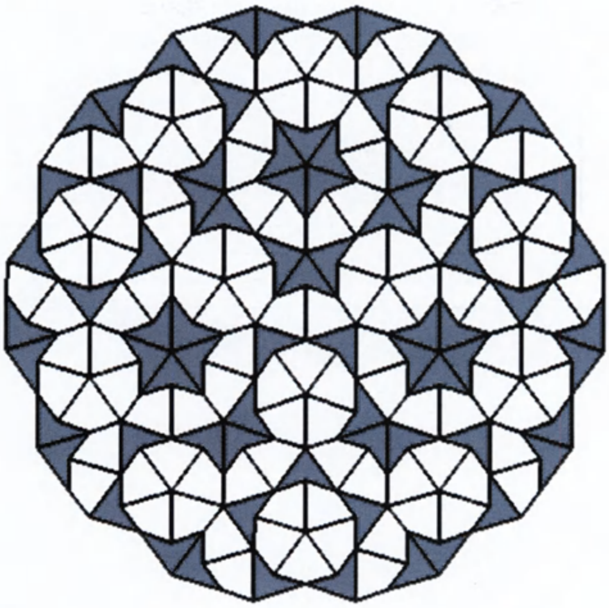




Gracias a la sección áurea se pueden conseguir motivos que sólo pueden teselar el plano de forma no periódica, según descubrió el físico matemático Roger Penrose.







Ludwig van Beethoven
(1770-1827)

En varias sonatas para piano de Mozart, la proporción entre el desarrollo del tema y su introducción es la más cercana posible a la razón áurea. ¿Intuición?

Tampoco se sabe si fue consciente de ello, pero en su *Quinta Sinfonía* Beethoven distribuye el famoso tema siguiendo la sección áurea.

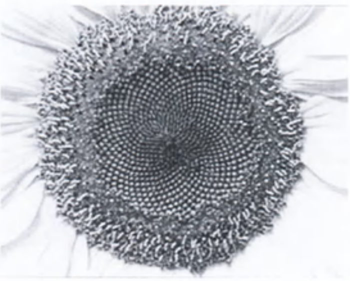
Los músicos de jazz autodidactas pueden no ser conscientes de la teoría de escalas, armonía y formas que usan habitualmente.

Sucesión de Fibonacci

Leonardo Pisano
Fibonacci (1170-1250)

Estrechamente emparentada con la razón áurea (a la que tiende la razón de dos términos consecutivos) se encuentra la sucesión de Fibonacci.

De modo intuitivo o consciente, esta serie numérica ha sido utilizada por las distancias proporcionales que guardan sus términos.

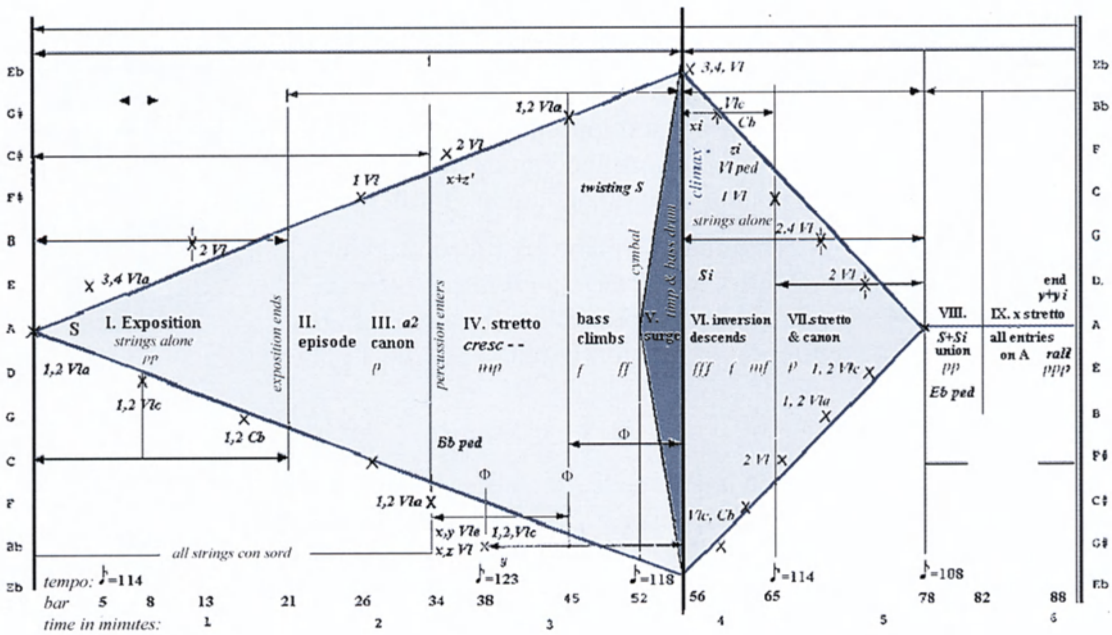


Espirales en el girasol

Béla Bartók
(1881-1945)

Bartók usó la serie para crear su escala Fibonacci. En su obra Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta, un análisis de su fuga nos muestra la aparición de la serie (y de la razón áurea).

Bartok: Music for String Instruments, Percussion and Celeste I. Fughe



EL JUEGO COMBINATORIO

Componer es el arte de combinar distintas ideas buscando una unidad formal. Cuanto más largo sea el desarrollo de las distintas ideas, más costará combinarlas. La combinación resulta más fácil cuando se trata de juntar frases muy cortas (como los compases). Tanto es así que si se establecen bien unos cuantos compases es posible combinarlos de una variedad increíble de formas, todas ellas placenteras al oído.

Wolfgang Amadeus Mozart
(1756-1791)

En su obra *Musikalisches Würfelspiel* (Juego de dados musical) K516f, de 1787, Mozart compone 176 compases para los minuetos y 96 compases para los tríos. Cada pieza consta de 16 compases. Estos compases están sueltos, pero Mozart ofrece unas reglas basadas en el lanzamiento de dados que permite combinarlos de múltiples formas. ¿De cuántas?

Minuetos: 11^{16} (casi 46 mil billones) formas no equiprobables correspondientes al lanzamiento de dos dados.

Tríos: 6^{16} (casi 3 billones) equiprobables correspondientes al lanzamiento de un solo dado.

Obra conjunta (minueto + trío): 66^{16} (más de 10^{29}). Es decir, más que granos de arena hay en la Tierra.

	Minueto															
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
2	**96**	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	**81**	**117**	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	**15**	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	**161**	2	159	100	90	176	7	34	**67**	160	**52**	**170**
6	148	74	163	**45**	80	97	36	107	25	143	64	**125**	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	**60**	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	**168**	89	172
9	119	84	114	50	140	86	**169**	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	**165**	61	135	47	147	33	102	**4**	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	**37**	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

Podemos oír cada uno de los 176 compases por separado. Los compases señalados fueron elegidos al azar según las normas de Mozart. Una vez combinados, el minueto y trío resultantes los hemos oído por primera vez en la historia ya que la probabilidad de que alguien hubiera elegido la misma combinación es despreciablemente pequeña.

	Trio															
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
1	**72**	6	59	25	81	41	89	**13**	**36**	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	**64**	85	**8**	35	**47**	**88**
3	75	39	54	**1**	**65**	43	15	80	9	34	93	**48**	69	58	90	21
4	40	**73**	16	68	29	55	**2**	61	22	67	49	77	57	**87**	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	**62**	38	4	**27**	52	94	11	**92**	24	86	51	60	78	31

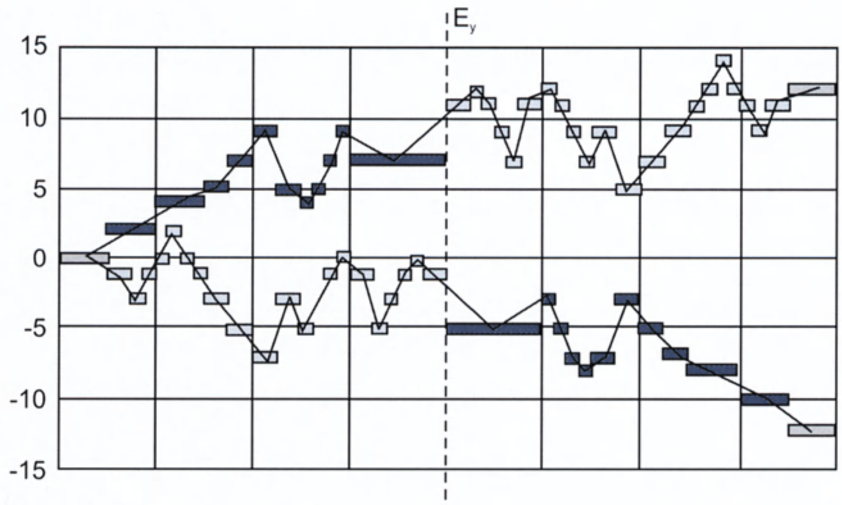
La partitura correspondiente a la anterior combinación es:

La atonalidad

La ruptura con la tonalidad coincide, históricamente, con la aparición del cubismo.

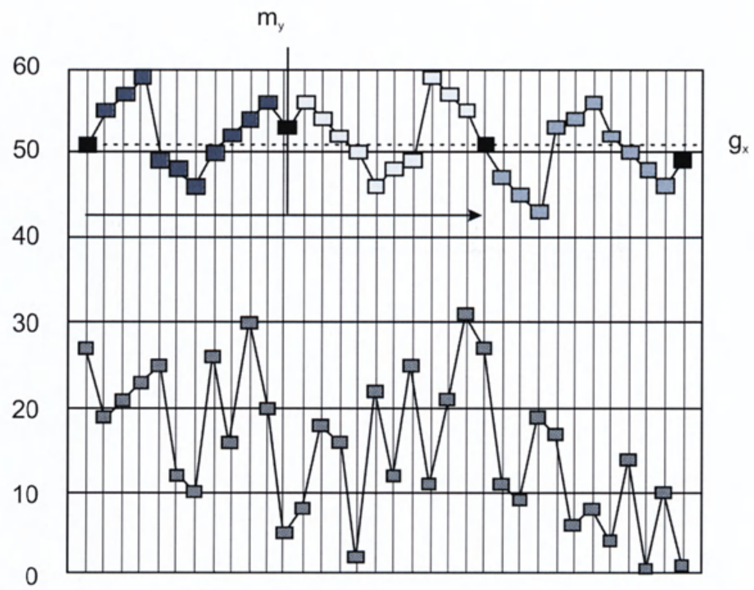
De la perspectiva *monocéntrica* se pasa a la visión *policéntrica*, en donde un objeto aparece desde múltiples puntos de vista. Cada punto del espacio tiene iguales posibilidades de ser centro. Igual ocurre con los tonos en la dodecafonía: todos adquieren igual relevancia.

Junto con la ruptura de la tonalidad, surge una pregunta: ¿somos capaces de aceptar una música sin tono central y sin las usuales pautas (los acordes y sus transformaciones isométricas)?

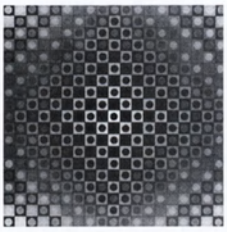


En la imagen se observan las simetrías tonales en el análisis de una obra musical.

Las clásicas transformaciones isométricas son ahora reemplazadas por permutaciones simétricas módulo 12. Es decir, para ver las simetrías e inversiones (como en la obra de Schönberg, *Quinteto de viento Op.26*) es necesario, previamente, reducir módulo 12.



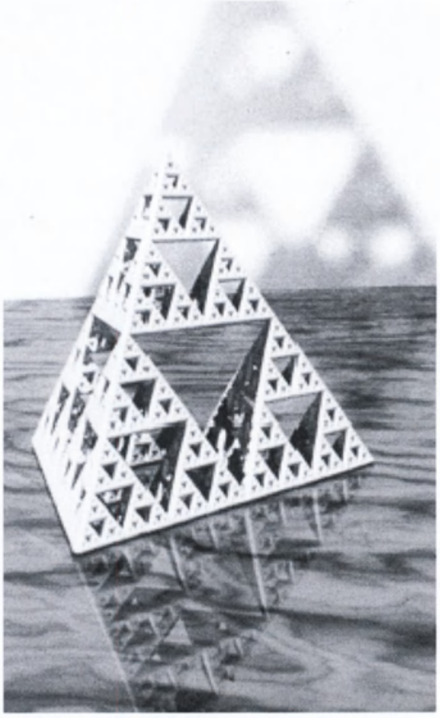
Arriba, la reducción módulo 12 (es decir, considerando todas las notas del mismo nombre como iguales) de la melodía atonal de abajo, cuya gráfica parece caótica. Una vez realizada la reducción, las simetrías vuelven a aparecer.

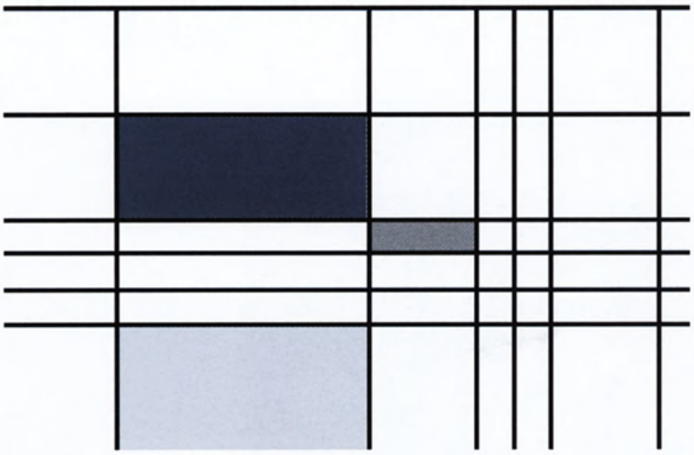


De esta forma, la simetría estática del sistema tonal clásico es sustituida por una simetría dinámica basada en permutaciones de un sistema secuencial (serial).

Otras novedades que surgen en el siglo XX tienen mucho que ver con las Matemáticas: la aparición del ordenador, la música algorítmica, la música microtonal, la música fractal, o la música probabilística de Iannis Xenakis.

Sin embargo, las simetrías se siguen empleando.





También se puede generar (recuerda el juego combinatorio de Mozart) Música al azar. Si las notas son completamente aleatorias se consigue un pobre resultado ("música blanca"). Pero si se dictan unas normas (unos patrones), los resultados mejoran. Pulsando sobre la imagen se generan cuadros aleatorios "al estilo Mondrian".

La técnica dodecafónica de Schönberg (hacia 1920) es la primera aplicación seria de un método algorítmico de composición. En su obra *Pierrot Lunaire*, también aparece un fragmento palíndromo.

Arnold Schönberg
(1874-1951)

Paul Hindemith (1895-1963) va más allá en su *Ludus tonalis*, creando un *postludio* que coincide con el preludio cuando se lee en vertical, de abajo arriba, y al revés.

Otros compositores, como Satie, han afirmado a su vez que utilizan métodos sistemáticos de composición. No por ello, curiosamente, son menos emotivas sus piezas. Como ejemplo, *Gymnopédies,* una fina y desnuda estructura donde la melodía circula sola y singularmente expresiva, como una hoja de otoño al caer. Un monótono acompañamiento bajo, contrastando con los acordes suavemente disonantes del registro medio, repite constantemente su ritmo yámbico. Juntos, crean una atmósfera de vaga melancolía, algo de sentimiento de fin de siglo, una nostalgia de sala vacía.

Erik Satie (1866-1925)

CONCLUSIÓN

La Música y las Matemáticas han estado a lo largo de la historia y continúan estando muy cercanas. La Música necesita del orden y la Matemática analiza ese orden. Proporciones, simetrías, transformaciones, homotecias, progresiones, módulos, logaritmos... Toda la construcción armónica y parte de la melódica es pura Matemática.

Sin embargo, no todo está clarificado. Como ya anunciaba el compositor Aaron Copland, hay algo en una buena melodía que no sabemos qué es pero nos conmueve. Ni siquiera somos capaces de definir **qué es una buena melodía**.

Parece que nos encontramos como ante el cuadro de Holbein: todo el marco, todos los símbolos, toda la historia y el contexto parecen muy claros. Pero queda una sospechosa y extensa mancha en la parte inferior del cuadro que no sabemos qué es. Y sin embargo intuimos, con razón, que en ella reside la clave del cuadro.

¿Podremos algún día descifrar este componente *anamórfico* de la Música? Si se consigue será porque hemos cambiado radicalmente nuestro *punto de vista* (o de *oído*).

Comunicaciones

Educación Infantil

UN TREN CON MISTERIO

Carmen Blanco
EI La Cañada (Coslada)

MATEMÁTICAS Y EXPERIENCIA EN EDUCACIÓN INFANTIL

Es obvio e indiscutible que durante toda la etapa de Educación Infantil el aprendizaje de cualquier tipo de concepto parte de la experiencia directa del niño, y que esa experiencia será eficaz cuanto más se base en la utilización del propio cuerpo como primer recurso.

De cero a dos años esta interiorización se hará principalmente a través de los sentidos (no olvidemos que el estado evolutivo del niño se corresponde con la etapa sensoriomotriz). Y, a partir de los dos años, la aparición del pensamiento simbólico permitirá al niño trasladar sus experiencias corporales a los objetos, dotándoles de cualidades muy específicas.

Para que cualquier concepto matemático sea realmente interiorizado y sirva para construir otro sobre él, para relacionarlo con otros conceptos y sacar conclusiones, los pasos imprescindibles son:

- La experiencia con el propio cuerpo.
- El traslado de la experiencia a los objetos.
- Su representación en grandes dimensiones, papel continuo o similar (a partir de los dos años).
- Su representación en fichas individuales (a partir de los tres años).

La ficha individual debe considerarse sobre todo con un carácter evaluador, para saber si el concepto está realmente interiorizado.

Hay conceptos matemáticos realmente sencillos de experimentar con el cuerpo: las situaciones en el espacio, los tamaños, los cuantificadores, … son ejemplos de ello.

Las figuras geométricas tienen un carácter más complejo; pero obviamente, si al hablar de cuadrado los niños viven la necesidad de reunirse cuatro compañeros para representarlo tumbados en el suelo, y descubren que deben colocarse de una forma determinada (ángulo recto) para poder cerrarlo, el paso para realizar cuadrados con materiales (picas, regletas etc.), dibujarlo en la arena, y reconocerlo y representarlo en papel es bastante sencillo.

EL APRENDIZAJE DE LA SERIACIÓN

Pero existen otros conceptos como es el de ***seriación*** cuya experimentación con el cuerpo plantea verdaderas dificultades.

Si analizamos qué es la seriación, veremos que no es sólo colocar una serie de elementos que se alternan. El concepto requiere el conocimiento profundo de los números cardinales (1, 2 y 3 al menos) y de sus ordinales correspondientes (1º, 2º y 3º), que nos indican cómo deben colocarse y el ritmo repetitivo.

Asimismo, a través de la seriación se afianza el concepto de clasificación, ya que los dos o tres elementos utilizados pueden agruparse, contarse y compararse.

La seriación también permite intuir la idea de los números periódicos puros.

Además se interrelaciona con otros conceptos, de forma directa con aquellos de lenguaje referidos a la aproximación a la lectura y la escritura, ya que en ambos casos es necesario empezar y continuar de una forma determinada, y además establecer grupos de dos, tres o más elementos; cada grupo correspondería a una palabra de una frase.

Para establecer cualquier tipo de serie es necesario un ***criterio,*** esto es, la orden genérica que permita establecer el ritmo que ha de seguir la serie. El criterio puede ser todo lo absurdo que queramos nosotros o nuestros alumnos, pero debe de tener unas características que le validen como tal.

Estas características son:

Claridad. Ningún criterio utilizado puede dar lugar a ambivalencia o errores; debe, de forma tajante, conducir a una única forma de seriar.

Concisión. Debe ser breve para no dar lugar a falsas interpretaciones y para no convertir la orden en algo farragoso, difícil de entender por los niños.

Variedad. Con frecuencia, el aprendizaje de las Matemáticas se convierte en algo aburrido y repetitivo; esto trae como consecuencia la falta de interés y la no interiorización real, el puro mecanismo. Esto es, el chiste ya anticuado de "con peras no sé sumar, que a mí me han enseñado a sumar manzanas". Si el criterio se varía, es divertido, se basa en la escucha de los intereses de los niños, en definitiva, si convierte la tarea de seriar en un juego divertido, no repetitivo, podrá llegar a ser realmente un aprendizaje significativo.

Vivencia. Se refiere a que la realización de la serie se convierta en algo donde el niño ponga sus cinco sentidos, su inteligencia y su imaginación.

LA EXPERIENCIA *UN TREN CON MISTERIO*

En coherencia con lo que se acaba de exponer, la experiencia Un tren con misterio se desarrolla de la siguiente manera:

Comenzamos proponiendo a los alumnos hacer "un tren alternando los niños y las niñas". Se hace ese tren y, casi con toda seguridad, llega un momento en que no podemos continuar porque hay más niños que niñas o a la inversa.

Este procedimiento nos permitirá trabajar el 1 y el 2, el 1º y el 2º, clasificar niños y niñas, decidir dónde hay más y dónde hay menos, realizar un cuenteo y buscar su representación gráfica en el ábaco.

Asimismo podemos relacionar la actividad con el Área I[1] y trabajar sobre ello.

El siguiente paso consistiría en indicar el criterio, pero el tren, o sea la serie, debe ser realizado por los niños. (Por ejemplo, el criterio es “un niño de pie y otro sentado”).

En tercer lugar, colocaríamos a los niños haciendo una serie, pero sin decir el criterio, que deberá ser descubierto por ellos (por ejemplo, colocamos a “un niño con los brazos subidos y al siguiente con los brazos bajados”, y así sucesivamente).

Por último, tanto el criterio como la serie la realizarán los propios niños.

Esto requiere, por supuesto, en todo el proceso, un trabajo de ayuda por parte del profesor; pero este trabajo no consiste en corregir, sino en encontrar las preguntas que guíen a los alumnos a rectificar sus errores.

En todos los casos la comparación, la clasificación y el recuento deben llevarse a cabo.

Como actividad final pediremos a nuestros alumnos un dibujo de la experiencia realizada; no olvidemos que en esta etapa el niño dibuja más lo que sabe que lo que ve. Esto nos servirá como instrumento de evaluación (de los niños y de la actividad propuesta) de gran eficacia.

[1] El Área I del currículo de Educación Infantil es *Identidad y autonomía personal.*

DESCUBRIENDO *LAS MATES* EN EDUCACIÓN INFANTIL

Rosa Escudero García
Psicóloga, especialista en Educación Infantil

LAS MATES... ¿QUÉ ES ESO?

Para los más pequeños de nuestras escuelas, la palabra Matemáticas no significa absolutamente nada, sin embargo, es un concepto que crece con él, como su sombra sin que se dé cuenta.

Le ocurre cuando se plantea llegar al espejo del cuarto de baño o cuando le recuerdan que debe portarse bien porque ya es mayor. Y, aunque debiera hacerlo, el niño no nos pregunta: ¿mayor que quién? o ¿mayor que qué?

Muy pronto aparecen objetos en su campo de visión y acción, y él tratará de hacerlos suyos, y seguro que hasta intentará *saborearlos.*

Cuando ya consigue ser más hábil y seguro pasa a sentir y manipular objetos y a relacionarse con ellos como independientes de su propio ser, pasan a tener vida propia o, al menos, él se la adjudica. Busca explicaciones para entender lo que le rodea, crea teorías y éstas se comprueban o caen por su propio peso según almacena experiencias.

Cuando manipula objetos y grupos de objetos con parecidas características, lo que más le suele gustar es *amontonar,* pero como científicos diremos *agrupar.*

Como es lógico, querrá tener más cada vez y jugará a *añadir,* y entonces surge la operación de *sumar.*

Pero, entonces, llega la educación de valores y la de su madre y con ambas la obligación de *compartir* (y, sobre todo si es con su hermano, la idea no le agrada demasiado). Aparece la idea de tener *menos,* con ella la terrible consecuencia de la *división* de sus queridas posesiones. Por ello, sobre todo si sabe lo que le conviene, se le presenta la necesidad de *contar* y además lo mejor posible, porque según el resultado tendrá que *restar* una parte a aquello que atesora. Por si acaso, aunque sea *a ojo*, debe *comprobar* que aquella operación resulta equitativa o a su favor (entonces... mejor callar).

Generalmente se sigue un orden jerárquico, inamovible en la adquisición de las operaciones matemáticas; sumar, restar, multiplicar, dividir, ecuaciones,... Pero quizá la teoría pueda bloquear y condicionar nuestro trabajo y programación en el aula de Infantil.

No podemos cerrar los ojos a situaciones y hechos vividos por los niños, en los que puede que la noción de *dividir* aunque la llame *quedarme con menos* surge muy pronto.

Pero no hay que asustarse, no consiste en *enseñar* a dividir tal y como nosotros lo entendemos nada más llegar a la escuela. Sí, observar, escuchar, preguntar, e intentar trabajar a partir de sus vivencias y de las relaciones matemáticas que los niños establecen de forma espontánea con los objetos, sus características y cantidades.

Orientar, conducir y crear situaciones en que repartir, añadir, quitar, contar, comprobar, razonar, separar en grupos, mitad, doble, *poner igual que tengo pero otra vez* (multiplicar),... es muy conveniente, y la propia actividad y progreso del grupo de niños irá marcando el camino que hay que seguir.

Observar, por ejemplo, si *sobra* o *falta* en una *mitad* u otra obliga al esfuerzo de *pensar* muy bien y establecer la relación que existe entre los grupos de objetos, su cantidad, características, etc.

Consecuentemente el término e idea de *igual a* empezará a tener sentido y el niño tendrá que *comparar* y construir los conceptos *más que, menos que,* etc.

Los conceptos *dame más*, o *no quiero más*, *¿puedo dejar algo?...* (sobre todo si es un niño inapetente), *espera un poco*, etc. están presentes en su vocabulario habitual y lo maneja con soltura pero resultan imprecisiones, no se ajustan a un sistema de medida. Incluso *siempre* y *nunca* parecen para él un número exacto de veces que incluso puede variar.

Poco a poco, ante situaciones y preguntas como "¿qué tenemos aquí?, ¿y allí? ¿Crees que es lo mismo... igual? ¿Porqué? ¿Dónde hay más?... ¿Porqué?". Y si cambiamos de lugar los objetos "¿y ahora?... Pero si me habías dicho que...". Y él dirá ya francamente enfadado, "¡pero tú has cambiado! ¡Haces trampas!...". "¿Y si pongo? ¿Y si quito?..."

Antes de que nos deje, harto ya, le proponemos que juegue él a preguntarnos, a jugar igual, y entonces se implicará de lleno.

Pero no vamos a dejar totalmente al azar este proceso de descubrimientos matemáticos ni en manos de la improvisación. Habrá que ir precisando su vocabulario y comunicándole los términos universalmente aceptados para sus operaciones, aspecto que no podrá saber sin nuestra intervención.

No debemos imponerlos antes de que surja la necesidad de usarlos, será él con su actitud quien lo vaya pidiendo. En este momento le diremos que para entendernos todos y saber que estamos jugando a lo mismo vamos a decir *sumar* o *equivaler*, etc.

Utilizaremos juegos, razonamientos y distintas herramientas que nos proporcionen el vehículo adecuado y rico para generar las ideas y los conceptos matemáticos que queremos suscitar.

MATERIALES

Serán los que consideremos oportunos y eficaces. Según Montessori, "la magia está en el niño" y no en los objetos propiamente. Pueden ser de distinta naturaleza y material. Elegiremos los que tengan más posibilidades, combinaciones, etc. Que sean atractivos, fáciles de usar, innovadores, clásicos o aportados por los niños:

- Cuentos. Hay muchos y muy buenos, actuales y tradicionales. Por ejemplo, *Una vaca hizo ¡MU!¡MU!* (Plaza & Janés).

- Astas de Montessori.
- Números en color (regletas).
- Objetos, piedras, garbanzos, *cristales mágicos*.
- Tarjetas de puntos. Método de G. Doman.
- Los mismos niños.

Poco a poco haremos su pensamiento independiente del uso de los materiales, porque *las mates* son las relaciones que ha autogenerado, que ha descubierto y convertido en operaciones mentales.

Haremos posible que progrese con la manipulación y necesidad de tener presentes los objetos sobre los que trabaja, hasta la *interiorización* de las relaciones entre cantidades, magnitudes,...

PROCESO DIDÁCTICO

Lo primero que haremos es *observar* a los niños. Conocer sus preferencias y aquello que parecen rechazar e indagar el porqué.

Al jugar con ellos les podemos *preguntar* provocando respuestas y razonamientos porque, como ya sabemos, sus criterios siempre son lógicos, corresponden a su lógica.

A la hora de preguntar haremos buen uso de este *arte*. No siempre nuestras preguntas van bien orientadas ni preguntan exactamente aquello que esperamos oír. Por ejemplo, en una clase de inglés de 2º de Educación Infantil, estaban repasando los colores. La *teacher* dijo de repente:

"¡Voy a dar un premio al que, cuando dé una palmada, me diga amarillo en inglés!"... (¡PLAS!)... y toda la clase, como si la vida entera les fuese en ello, gritó... "¡Amarillo en inglés!"

Bromas aparte, nuestras preguntas deben ir dirigidas tanto con el fin de obtener información directa de lo que el niño piensa y hace, como con la idea clara de qué concepto matemático busco generar en él.

Siempre después de preguntar, volveremos a escuchar con atención, volver a preguntar, poner en *contradicción*. Ver y oír sus *razonamientos*. Darles siempre la oportunidad de *comprobar* aquello que afirman. Que no crean nada sólo por el hecho de que nosotros, los "listos mayores", se lo ratifiquemos. Si es posible y siempre a su nivel deberían poder *demostrar* sus conclusiones, opiniones o teorías.

Al final deben poder *verbalizar* correctamente el concepto matemático desarrollado. Su cara de felicidad cuando lo consigue es la mejor recompensa a nuestro trabajo.

En el proceso de independizarse de los materiales e interiorización de procesos, relaciones matemáticas, etc., en esa abstracción y cálculo mental iremos refiriéndonos a problemas de su vida cotidiana, a situaciones reales donde la aplicación de lo descubierto encuentra pleno sentido.

ACTIVIDADES

Siguiendo unas líneas generales de trabajo como las expuestas anteriormente presento una serie de actividades para la etapa de Educación Infantil. En concreto y porque requieren unas destrezas ya logradas en los cursos anteriores, son adecuadas para el nivel de 3º de Educación Infantil, describimos:

- ¡Hola euro!
- Carreras de puntos (cantidades, mayor que, menor que).

¡HOLA EURO!

Objetivos

1. Conocer y clasificar distintos tipos de alimentos, según un criterio concreto (procedencia animal o vegetal, tipos de tiendas donde situarlos...).
2. Familiarizarse con las cantidades expresadas en euros. Verbalización y escritura de cifras.
3. Fomentar a través del juego, actividades de compra-venta y estimación de precios.

Materiales

Folletos de propaganda de tiendas y supermercados.

Papel continuo para los murales y folios.

Tijeras, pegamento, pinturas,...

Envases vacíos de alimentos, limpieza, etc.

Tiempo

Un mes, espaciando actividades y juegos. Retomar en sucesivas ocasiones para perfeccionar conceptos, escritura y lectura de cantidades expresadas en euros.

Lugar

Aula y espacio exterior para murales.

Actividades

- Repartir los folletos, revistas, etc., que hayan traído. Escuchar sus comentarios y preferencias.
- Preguntar qué les gusta más, si *vale* o *cuesta* mucho o no, ¿cuánto?... ¿Qué comprarías? ¿Por qué?
- Anotar sus respuestas.

1. Centrándonos en el tema de los alimentos, recortan y clasifican, según el criterio elegido, los tipos de tiendas para los de origen animal o vegetal.
2. Se pegan los alimentos recortados en un mural colectivo, clasificando y dialogando.
3. Observar y recortar sólo los precios expresados en euros (ya que han traído propaganda anterior al establecimiento pleno del euro, se fijarán, compararán y dejarán los expresados en pesetas).
4. Guardar en cajas o bandejas los precios. Una por cada cuatro-cinco niños para que los grupos de debate sean operativos.
5. Escuchar, en varias sesiones, qué comentan sobre las cantidades y cómo las dicen. Notaremos que poco a poco van llegando a criterios comunes. Aprovecharemos las aportaciones más cercanas a la realidad para centrar su vocabulario.
6. Por grupos, extender precios recortados y elegir uno cada niño. Explicar el porqué.
7. Colocar los elegidos sobre un folio y pensar si son iguales..., mayores o grandes, etc. Decidir cuál es el mayor o menor y ordenar el resto de forma correlativa. Se puede repetir esta actividad varias veces y ellos irán desplazando unas cifras con otras según mejora su criterio.

   Entre ellos surgen las soluciones a conflictos. Por ejemplo, Juan piensa que 8.50 ≠ es mayor que 17.03, pero enseguida Luis le dice que es 17 y no 8 y que lo demás es *más pequeño,* y todos acuerdan que se fijarán en los números de este lado (izquierda). Cuando se encuentran cifras como 8.70 y 8.03 también dicen que si el 8 está igual, miran lo *otro.*
8. Después los pegarán ordenadamente. Revisan y extraen conclusiones.
9. Individualmente escriben precios que les gusten en las pizarras y les dicen a otros lo que han hecho y si es el precio de una moto o un *tazo*[1]. Comparan, dialogan y discuten si alguien entiende que ese precio no puede corresponder a ese objeto.
10. Observaremos que los términos *caro* y *barato* se aplican de forma arbitraria, incluso con significado totalmente contrario. Será necesario nuestra intervención.
11. Sobre el mural, escribirán cantidades tratando de estimar el precio adecuado al producto, aspecto que resulta bastante difícil para la mayoría porque no conocen el valor del dinero aún.
12. Jugar a *las tiendas*, comprando y vendiendo los envases que hayan aportado entre todos. Expresan los precios en euros y pueden pagar con dinero de juguete o con regletas, por ejemplo:

    una naranja = 1 euro, 2 naranjas = 2 euros,

    1 blanca = 10 céntimos, 2 blancas = 20 céntimos... y 10 blancas = 1 euro
13. Por último y en grupos, pueden elegir un objeto o alimento. Se ponen de acuerdo sobre el precio y crean un cartel de publicidad que se coloca en las ventanas como si fueran los escaparates.

[1] Ficha circular de cartón con algún dibujo, muy popular entre los niños y niñas a finales de los 90, con la que juegan, hacen intercambios, etc.

CARRERAS DE PUNTOS

Objetivos

1. Localizar cantidades mayores y/o menores que otra dada.
2. Tener en cuenta las múltiples posibilidades.
3. Desarrollar el pensamiento lógico.
4. Disfrutar en juegos colectivos.
5. Respetar las normas que rigen el juego.
6. Desarrollo de la atención y reflexión.

Material

Tarjetas de puntos (Método de estimulación de la inteligencia, G. Doman)
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

Actividad

1. Como los niños ya tienen experiencia y conocen las tarjetas y su información, no precisamos explicarles demasiado. Juegan 10 niños y sobrará una tarjeta.
2. Les daremos una tarjeta a cada uno, y no deben enseñársela a los demás.
3. Diremos "que den UN paso los mayores de... 3", " los menores de... 8", "los menores de... 2", etc., hasta que llegue el primero a la meta.
4. Éste debe tratar de saber qué número de puntos tienen los demás en sus tarjetas, por lo menos una de ellos o la mía. Si lo consigue, pasa a decir él los pasos de la carrera siguiente.
5. Notaremos que prefieren las cifras centrales... ¿Por qué?, les preguntaremos. A partir de sus respuestas y razonamientos tendremos una nueva faceta de trabajo matemático.

O
MATEMÁTICO
P
E
C
N
O
OBSERVACIÓN
S
C
U
C
H P
MATERIALES
R E
G E
U S
CONTRADICCIÓN
T U
A COMPROBAR
R H A
A Z
R O
N
V A
DEMOSTRAR
R
B
A
L
I
Z
A
G R A C I A S

TALLER CIENTÍFICO: ¡NECESITO USAR LO QUE SÉ DE MATEMÁTICAS!

Rosa Martínez González
Montserrat Cortada Cortés
CP Fontarrón

En nuestro *Taller Científico* estamos poniendo en práctica nuestros conocimientos de Matemáticas. Cuando experimentamos con las cosas y queremos saber sus características físicas y su comportamiento en distintos medios como la tierra, el agua y el aire; o en superficies rugosas y lisas; o en planos horizontales, inclinados y verticales, *necesitamos comparar, ordenar, contar, hacer cálculos y usar distintas mediciones.*

Para descubrir cómo se comportan las distintas cosas en diferentes situaciones, jugamos con chapas, canicas, dados, coches con ruedas y sin ruedas, globos, pelotas, aros, petanca, corchos, agua, tierra... Nos tiramos por el tobogán, nos bañamos con juguetes, hacemos circuitos con pendientes, colocamos objetos en un barco y tiramos cosas desde mucha altura para comprobar la velocidad con la que bajan.

Constantemente lanzamos hipótesis que luego comprobamos y comparamos. Siempre tenemos que contar y calcular. Con cantidades continuas tenemos que llegar a acuerdos previos sobre la unidad de medida que vamos a utilizar. *Tenemos que registrar los resultados, hacer gráficas que nos permitan visualizarlos rápidamente y hay momentos en los que tenemos que resolver problemas importantes.*

Los conocimientos que vamos adquiriendo nos permiten mover juguetes que fabricamos: coches, trenes, camiones, aviones, móviles, paracaídas, barcos, submarinos,...

ALGUNAS EXPERIENCIAS CON NEWTON

Los niños juegan con los objetos, actúan sobre ellos y observan lo que pasa. Repiten acciones para comprobar que se producen los mismos efectos. Cambian los objetos y repiten las acciones, e intentan conseguir efectos determinados probando distintas acciones.

Si observamos estos juegos, vemos que pueden permitirles acceder a diversos aspectos de la ciencia (no a conceptualizaciones), si les ayudamos a desplazar su actividad del mundo físico al ámbito simbólico.

Nuestra intervención consistió en avanzar un paso más en *su reflexión científica* ayudando a los niños a dar sentido a las acciones, haciendo que expliquen alguna de las causas o de las situaciones que dieron lugar al efecto, creando situaciones en las que se puede explorar y comprender la realidad física y dando nombre a la acción: *"Las Leyes de Newton"*.

1. Si a un objeto se le aplica una fuerza, se acelera en la misma dirección y sentido que la fuerza

Jugamos a las chapas y a las canicas.

Primero jugamos libremente para conocer las reglas de los juegos y aprender a poner los dedos de la mano para impulsar los objetos.

El segundo paso fue preparar la observación y para ello tuvimos que adoptar una serie de decisiones; en primer lugar había que acotar el espacio: la salida y la meta de los objetos. Acordamos que para saber la longitud del trozo de pasillo donde íbamos a jugar, utilizaríamos los pies. Se hicieron varias *mediciones, contamos* el número de veces que se ponían y descubrimos que cuando lo hacían los niños salía un número mayor que cuando lo hacía la profe: descubrimos que el pie de la profe ocupaba más espacio y que ¡cuatro pies de los niños *equivalían* a tres de la profe! También decidimos que el número de tiradas sería ilimitado porque lo interesante era hacer todo el recorrido.

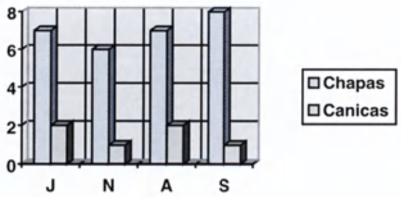
Por equipos, jugábamos con las chapas y las canicas, registramos el número de tiradas, comprobando las hipótesis que teníamos:

1º) Las cosas redondas se mueven mejor.

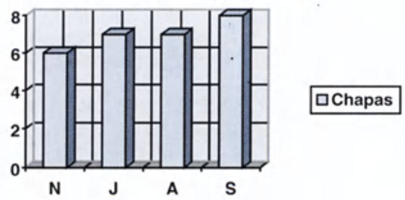
2º) Si se emplea más fuerza se acelera más y el recorrido es mayor.

3º) Los objetos se mueven en la misma dirección y sentido en la que se aplica la fuerza.

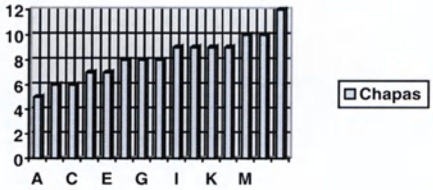
Los registros los pasamos a gráficas, que hacíamos con *gomets*:



Hacemos *comparaciones* de cantidades: son mucho menores las de canicas que la de las chapas. ¡Efectivamente, las canicas recorren más que las chapas ejerciendo la misma fuerza!



Ordenamos de menor a mayor las cantidades resultantes. ¡Es evidente que la fuerza que se ha aplicado es distinta!



Calculamos con los datos de toda la clase: ¿cuántos niños y niñas han hecho el recorrido con 5 tiradas?, ¿cuántos lo han hecho con 6?, ¿y con 7?... ¿Cuál es la cantidad menor?, ¿y la mayor?

En el experimento con las chapas y las canicas, descubrimos que el lenguaje matemático era imprescindible para lanzar hipótesis, experimentar, comprobar y sacar conclusiones. Conocer la serie numérica era básico, igual que las nociones de cantidad, orden y cálculo. Y sobre todo, nos gustó mucho la realización de representaciones en gráficos, porque nos facilitaban la lectura rápida de los resultados.

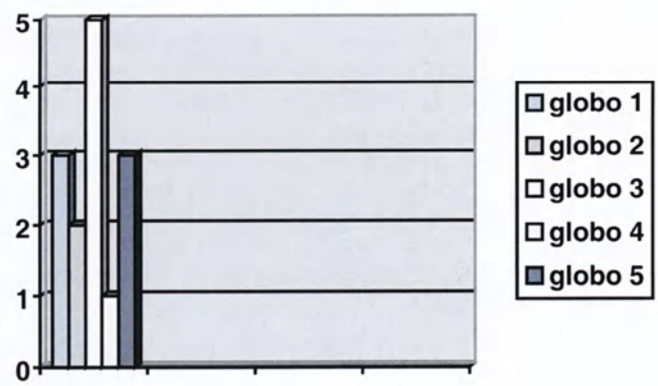
2. "Acción y reacción": si un objeto hace fuerza sobre otro, este otro ejerce también una fuerza sobre el primero pero en sentido opuesto

El aire hace mover los globos

Primero jugamos con globos, los inflamos, los soltamos y observamos lo que pasa.

En la observación científica, al haber muchos globos de colores iguales, decidimos poner a cada uno un número para distinguirlos (*el número como indicador*) y observamos el comportamiento de los globos: si hacían un recorrido largo o corto; en algunos casos era difícil saber qué globo hizo el recorrido más largo, por eso tuvimos que buscar una medida objetiva y decidimos que fuese un trozo de cuerda y medir con ella el espacio recorrido (*el número como magnitud*).

Para registrar los resultados hacemos una gráfica con *gomets:*



Nos planteamos, ¿qué globo llegó más lejos? ¿Por qué lo sabemos? ***(el número como cantidad)***.

Los niños se plantearon múltiples hipótesis: ¿el mío llega muy lejos porque lo inflo mucho?, ¿porque lo suelto muy bien?, ¿porque me subo en la silla?...

¿El mío no vale porque se ha torcido? Esta intervención es importante para nuestros conocimientos de Física. Los niños saben que el aire al salir hace mover el globo, pero tienen que descubrir que la presión del aire al salir produce un movimiento del globo en dirección opuesta.

La dirección del globo será opuesta a la salida del aire

Planteamos una nueva situación experimental. ***Hacemos un cohete.***

Pasamos una cuerda por una pajita y atamos cada extremo de la cuerda a una silla. Inflamos un globo y le ponemos una pinza para que no se escape el aire, pegamos el globo a la pajita con cinta adhesiva y deslizamos el cohete hacia el extremo de la cuerda, quitamos la pinza y el cohete se dirige hacia el otro extremo de la cuerda.

Los niños reflexionan: ¿por qué no vuelve el cohete? Los niños descubren pronto que el cuello del globo debe estar en dirección opuesta a la que deseamos que se dirija nuestro globo.

Aplicación de nuestros conocimientos: ***¿cómo subir un objeto al techo?***

El primer acuerdo fue sobre materiales: globo, red, cuerdas y una cestita.

A continuación hubo un proceso continuo de resolución de problemas. Para unir el globo a la cesta, ¿cuánta cuerda se necesita?, ¿cuántos trozos se usarán? ¿Qué tamaño tendrá la red?, ¿más grande o más pequeño que el globo? ¿Qué pasa con la red cuando inflamos el globo? Para resolver esta situación necesitamos otra vez de nuestros conocimientos matemáticos: *tenemos que contar, medir, hacer cálculos, comparar,...*

Descubrimos que las redes pequeñas no valen cuando inflamos el globo, tenemos que pensar en la red teniendo en cuenta el tamaño del globo inflado y que las cuerdas tienen que medir lo mismo.

Cuando parece que todo está resuelto, surge un nuevo problema: no todos los globos llegan al techo, aunque los inflemos mucho. ¿Por qué el 2 sube y el 3 no? Y descubrimos que también el peso de la cesta influye. Hay que pesarlas antes de sujetarlas al globo; las que pesan más de 3 piedras no nos sirven. *Las Matemáticas otra vez nos han resuelto el problema.*

EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA

La mejor evaluación la hicimos en la fiesta de juegos que celebramos con los padres y los abuelos. Los niños y niñas tenían que explicar a los adultos cómo tenían que jugar a las chapas, a las canicas, cómo tenían que hacer los cohetes, cómo subir objetos al techo... y muchos experimentos más.

Los responsables de cada experimento, iban haciendo sus registros con el nombre de los participantes y resultados.

La estadística nos resultó muy interesante. Cuando trabajamos los datos, pudimos saber: cuántos adultos habían participado, los objetivos conseguidos, los resultados según las destrezas, en qué experimento habían participado más personas, etc. El gráfico de barras (*gomets*) de cada actividad nos facilitaba una lectura rápida de los resultados, así como un análisis comparativo entre experimentos.

APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS EN UN PROYECTO DE EDUCACIÓN VIAL

Mª Luisa Blanco Sanz, Consuelo García Gestoso, Mª Paloma Molina González, Lucía Ángeles Olmo Padilla, Mª Teresa Pérez Enciso, Francisca Sánchez Bustamante, Mercedes Sánchez Martín

CP Valdebernardo

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación se basa en una experiencia de trabajo de Matemáticas, en un proyecto de Educación Vial realizada durante un trimestre con niños de Educación Infantil de cuatro y cinco años del CP *Valdebernardo* de Madrid.

Nuestro proyecto ha trabajado las Matemáticas utilizándolas de forma cotidiana para resolver situaciones reales con sentido para los niños. Así, se ha percibido que las Matemáticas servían para organizar la realidad. Posteriormente ha habido reflexión, generalización y conclusiones. Esto ha conectado el trabajo escolar con las necesidades de la vida diaria y con la perspectiva histórica de que las Matemáticas surgieron para resolver problemas y retos reales.

Los niños han ido construyendo sus aprendizajes matemáticos mejorando y enriqueciendo lo que ya sabían. De hecho los niños están en contacto con números y términos matemáticos desde que nacen. Se ha partido de sus hipótesis e ideas previas como evaluación inicial, para compararlas con sus conclusiones finales al término del proyecto y valorar así lo que habían aprendido, tanto de contenidos matemáticos como de su aplicación para resolver problemas cotidianos.

Este aprendizaje se produce en comunicación con otros y luego se asimila como propio. El contacto con otros niños o adultos que sepan más ayuda a superar retos y avanzar en nuevos conocimientos. En el margen entre lo que uno sabe y lo que uno podría llegar a saber con ayuda de otros, es donde se mueve la construcción social de los aprendizajes. Se supone que desde que nacemos tenemos ideas y conocimientos sobre el mundo que nos rodea y que estos se van enriqueciendo a lo largo de la vida, siempre apoyándose en lo que ya se sabía.

Nuestra intervención educativa trata de caminar desde lo que saben los niños a la convención y el rigor de la ciencia y la cultura que nos rodea. Intentamos respetar las hipótesis infantiles sobre cómo funcionan y se utilizan las Matemáticas. Se ha comprobado que estas hipótesis son comunes a niños de diferentes culturas y países. Les permitimos expresar cómo van organizando sus mentes y hacerlo con diversidad de caminos para solucionar problemas.

De ahí que no consideremos los errores propios de la edad como faltas de rigor sino como pasos necesarios en la construcción de conocimientos y estrategias matemáticas convencionales. Como ejemplo, muchos niños han comprobado que el uso de las Matemáticas permite ganar tiempo y simplifica la comunicación y la resolución de problemas. Ayudamos a los niños a organizar y sistematizar sus experiencias utilizando un lenguaje matemático cuidado y con rigor.

ACTIVIDAD	¿QUÉ TRABAJAMOS?	¿CÓMO LO HACEMOS?
Proyecto de Educación Vial	• Formas. • Señales. • Colores.	• En las señales de tráfico.
	• Correspondencia.	• Entre la forma de las señales y su significado. • De cada coche con su aparcamiento. • De cada pasajero con su asiento de coche o autobús.
	• Orientación espacial.	• Dirección y sentido de las calles. • Conducir y caminar de frente, hacia atrás, a derecha o izquierda. • Recorridos e itinerarios en la realidad y en el plano. Laberintos. • Identificar en el plano del barrio la casa de cada niño, los edificios más relevantes y los recorridos que hacen (Ej. de casa al colegio). • Localizar la ruta de los autobuses del barrio. • Pasar del plano a la acción y viceversa: dibujar o vivenciar escenas o juegos de tráfico.
	• Contar.	• Señales, calles, peatones, pasajeros, vehículos.
	• Clasificar.	• Tipos de señales. • Tipos de vehículos. • Motores y otras energías que mueven vehículos. • Normas de tráfico: advertencia, peligro, prohibición.
	• Permanencia de la forma.	• De calles y coches desde distintos puntos de vista: lateral, frontal, de espaldas cenital, en fotos y planos.
	• Comparación y medida.	• De recorridos de coches y chapas. • De vehículos. • De longitud de calles en el plano.
	• Probabilidades.	• De nº de coches o peatones que pueden pasar. • De nº de pasajeros en un vehículo.
	• Tiempo.	• Velocidad de vehículos y peatones. • Turnos de paso de unos a otros. • Turnos de los semáforos. • Secuencias temporales sobre situaciones de tráfico.
	• Tiempo con música.	• Emparejarse. • Secuencias rítmicas, series de acentos. • Contrastes de velocidad. • Frecuencias.
	• Procedimientos: – Argumentación. – Anticipación.	• De cada paso, decisión o acontecimiento. • Prever las consecuencias: cuidado y respeto en el tráfico para no causar daño a otros.

Es crucial la cuestión de qué Matemáticas pueden aprender los niños según su edad. Nosotras optamos por presentar la Matemática real que sirve para resolver las situaciones de la vida que se nos presentan e ir comprobando hasta qué nivel de complejidad pueden llegar los niños. Parece que hay momentos óptimos de aprendizaje de ciertas nociones matemáticas en estas edades previas a los seis años. Además nos aventuramos a probar con ciertos aspectos que habitualmente no se trabajaban a tan temprana edad, como la interpretación y elaboración de mapas y planos.

MATEMÁTICAS EN LAS RUTINAS DIARIAS

A continuación pasamos a exponer cómo trabajamos las Matemáticas en las rutinas diarias y en el proyecto de Educación Vial.

Actividad

Pasar lista.

¿Qué trabajamos?

Conteo, descomposición numérica, regletas, resolución de problemas: sumas y restas, comparación de cantidades, probabilidades, números ordinales.

¿Cómo lo hacemos?

En el espacio donde hacemos la *asamblea* se encuentra un cartel donde figuran todos los nombres de los niños de la clase. Un distintivo va marcando a qué niño le corresponde ser el encargado de realizar las *rutinas* del día y será el primero de la fila.

El encargado pasará lista leyendo los nombres de sus compañeros y colocará en el panel los de los niños ausentes. Se contarán y colocarán los números de los niños que están en clase así como de los que no han venido al colegio. Con el número de los que no han venido, diferenciaremos cuántos niños y cuántas niñas.

Posteriormente representaremos estas cantidades con regletas. Por ejemplo: si el número total de los que faltan es cinco, podemos jugar a mandarlos de viaje en un autobús que será de color amarillo, y encima de esa regleta colocaremos los asientos respondiendo a la pregunta: ¿cómo pueden ir sentados los niños en el autobús? Intentaremos que salgan todas las combinaciones posibles.

Otra forma de pasar lista, sería tener un tren donde cada vagón representa un equipo de la clase. Al final del día el tren queda vacío, y cada mañana el encargado debe colocar en el vagón correspondiente los niños que están en el colegio. Los que no han venido se colocarán en el panel de los ausentes, que se puede representar con diferentes motivos, como por ejemplo relacionarlo con el símbolo que le corresponde a cada aula.

Cuando hemos pasado lista, trabajaremos las comparaciones y probabilidades respondiendo a las siguientes preguntas: ¿cuántos faltaron ayer?, ¿cuántos éramos ayer en clase?, ¿cuántos faltarán mañana?, ¿cuántos estaremos mañana en el colegio? El encargado apuntará las cantidades y se comprobarán al día siguiente.

Actividad

Calendario.

¿Qué trabajamos?

Días de la semana, distinguir los días lectivos de los que no lo son, contar hacia delante y hacia atrás: de 1 en 1, de 2 en 2, a partir de un número determinado, calcular, registrar datos, estadística.

¿Cómo lo hacemos?

Coloreando el día de la semana en que estamos.

Señalando los cumpleaños, excursiones... contaremos ¿cuántos días faltan para...?

Construyendo todos los meses un calendario, teniendo como referencia otro comercializado.

El calendario, junto con la banda numérica que existe en la clase, sirve para encontrar las cantidades que necesitamos.

Registrando el tiempo que hace a lo largo de la semana y realizando una estadística al final de la misma.

Actividad

Rincones.

¿Qué trabajamos?

Figuras geométricas, registro e interpretación de gráficos.

¿Cómo lo hacemos?

Completaremos un cuadro de doble entrada para señalizar dónde pueden jugar y trabajar los diferentes equipos cada día de la semana, de manera que a lo largo de la semana todos los equipos pasen por todos lo rincones.

Puede haber más de un registro, ya que su elaboración dependerá del criterio de agrupamiento que hayamos elegido. Por ejemplo, uno de ellos puede ser el equipo de trabajo ya formado, y otro diferente será si asignamos a cada niño de cada equipo una figura geométrica. De esta forma, conseguiremos que los niños de los diferentes equipos se relacionen entre sí en diferentes actividades.

Actividad

Reparto de material.

¿Qué trabajamos?

Conteo, correspondencias, nociones temporales, figuras geométricas.

¿Cómo lo hacemos?

Cada día de la semana tiene asignada una figura geométrica. Cada niño de cada equipo tiene también asignada una figura geométrica. De esta forma, cada día el responsable del equipo será el que tenga la figura geométrica que corresponde al día de la semana en que nos encontramos. El responsable es el encargado de repartir el material necesario a sus compañeros de equipo: tijeras, fichas de trabajo, folios, punzones,... Cuando queremos dificultar esta tarea podemos poner restricciones a dicho reparto, por ejemplo, quitando hojas para que no haya suficientes, o imponer la restricción de que se haga el reparto en un solo viaje.

MATEMÁTICAS EN EL PROYECTO DE EDUCACIÓN VIAL

En el ámbito de la orientación espacial dentro de la Educación Vial, hemos trabajado situaciones reales de movimiento y acción, interpretación y representación de planos y gráficos. Ha sido sorprendente el interés y habilidad de los niños manejándose en estos terrenos.

Hemos realizado juegos de movimiento sobre la dirección y sentido de las calles, respetando las señales correspondientes, conduciendo y caminando de frente, hacia atrás, a derecha o izquierda. También hemos realizado recorridos e itinerarios. Luego los niños han representado de forma gráfica estas situaciones.

Asimismo, hemos interpretado planos del colegio, del barrio y de la ciudad. Como todos los niños viven en el mismo barrio de Valdebernardo, hemos identificado en el plano la casa de cada niño, los edificios más relevantes y los recorridos que hacen (ej. de casa al colegio). También hemos localizado la ruta de los autobuses del barrio. A la hora de realizar salidas fuera del colegio, hemos situado los recorridos en un plano de Madrid. Otra actividad ha consistido en que los niños hagan planos del recorrido de su casa al colegio y un mural sobre el barrio. Este amor por los planos y mapas ha llegado hasta el globo terrestre, donde intentan localizar cualquier lugar que tenga sentido para ellos.

Otro aspecto interesante trabajado en estas representaciones ha sido la permanencia de la forma y las perspectivas desde distintos puntos de vista. Los niños han reconocido y representado después, fotos, dibujos y planos de calles, vehículos y peatones desde distintos puntos de vista: lateral, frontal, de espaldas y cenital.

Hemos evaluado este trabajo constatando el entusiasmo de los niños por todo lo que han aprendido, cómo han mejorado y enriquecido sus ideas previas sobre los contenidos matemáticos tratados y cómo los han aplicado, viendo su utilidad, a las situaciones reales que se han ido presentando en el aula.

HAGAMOS UNA CASA

Consuelo Pozo Mora
Colegio Siglo XXI

¿CÓMO NACIÓ?

Al crear una zona de experimentación con materiales de uso habitual en la cocina de sus casas (ralladores, exprimidores, morteros, rodillos,...) surgió la idea de hacer una casa como la que había en el otro aula de cuatro años. Para ello nos planteamos las siguientes preguntas: ¿qué materiales necesitamos para hacer una casa?, ¿cómo la podemos hacer? Se trataba de provocar un conflicto cognitivo que les llevase a proponer soluciones que, a la hora de ponerlas en práctica, les planteasen nuevos conflictos.

¿QUÉ NECESITAMOS?

Ante esta pregunta surgieron numerosas repuestas: ladrillos, madera, cemento, etc., pero se fueron desechando -por no ser viables- hasta llegar a los envases de *tetrabrik* que todos teníamos en casa y tenían forma de ladrillo.

¿Cómo los uniríamos? Con pegamento; después se vio que no unía con fuerza y tuvimos que utilizar cinta adhesiva.

¿Cuántas cosas tiene una casa y de qué tamaño? Por equipos describieron la casa y anotaron sus elementos: puertas, ventanas, paredes, techo,... También anotaron lo que medía la casa, para ello utilizaron cintas métricas, lápiz y papel.

¿CÓMO LO HACEMOS? ACTIVIDADES

Análisis y descripción la casa

Los niños describieron los elementos que tenía la casa de la otra clase de cuatro años.

Tomar medidas de la casa

Al comparar las anotaciones de las medidas de la altura de la paredes que habían tomado en el papel sobre la pared del aula, se vio que la altura de la casa era muy baja y entonces se plantearon: ¿cómo debía ser de alta la casa? Después de un debate se llegó a la conclusión de que por lo menos debía ser *"igual de alta"* que el niño más alto de la clase o incluso *"un poco más"* por si crecía.

Tomar medidas de los niños

Sobre un papel puesto en la pared marcamos y medimos la altura de todos los niños. Como había algunos niños que no venían porque estaban enfermos, no podíamos saber cuál era el niño más alto, pues una de las niñas que faltaban, era "muy alta". Varios niños propusieron llamar por teléfono a quienes estaban enfermos para saber cuánto median. Anotaron en un papel el número de teléfono y al día siguiente trajeron las medidas de los niños que faltaban.

Ordenar

Ordenaron las medidas de los niños de mayor a menor y, por fin, decidimos cuánto debía medir de altura la casa.

Repartir tareas

Se repartieron las tareas para construir el techo y las paredes, y lo hicieron por equipos.

Clasificar según distintos criterios

Se clasificaron los envases según tamaño, marca y forma. Separaron los envases haciéndolo primero por *marcas*, pues identificaban las marcas comerciales de los envases, pero se vio que no coincidían los tamaños. Los agruparon entonces por *altura*, pero cuando fueron a hacer las columnas de ladrillos no se podía porque tenían anchos diferentes, así que se agruparon por *la altura, el ancho* y *la forma*.

Cada equipo unió los envases de diferente manera, unos a lo ancho y otros a lo largo, alcanzando las tiras la misma longitud, 145 cm, pero con diferente orientación espacial. Unirlos de diferente forma implicó que la primera tira de envases la confeccionaban midiéndolos con la cinta métrica y la segunda contando el número de envases que, por equipos, variaba según estuvieran pegados a lo ancho o a lo largo.

Construcción de las paredes y techo

Puse cintas métricas pegadas sobre las mesas, los niños juntaban envases hasta llegar a la medida acordada (145 cm) para hacer las paredes de la casa. Los pegaban, primero con pegamento y luego con cinta de embalar. Una vez hecha la primera fila, contaban los ladrillos que había en ella y hacían las siguientes tiras juntando la cantidad de envases necesarios. El número de ladrillos en cada fila era diferente en función de la orientación en la que habían unido los envases de su forma y tamaño, pero la longitud debía ser igual.

Con esta experiencia he pretendido que los niños aprendan, por medio de la resolución de problemas, a descubrir el mundo de los números no como algo aislado, sino aprovechando toda la información cargada de significado y funcionalidad utilizando para ello materiales de uso social (cintas métricas, básculas, tetrabrik,...) Después de iniciar la construcción de la casa, los niños empezaron a utilizar otros objetos que había en el aula como la báscula, el peso de cocina y la caja registradora que incorporaron a sus juegos simbólicos para medir y calcular.

He priorizado aprender por medio de la resolución de problemas -porque los conceptos matemáticos no están aislados-, y a través de la interacción social -porque es una situación importante en el aprendizaje de los niños en la cual el adulto sólo es un mediador-. Es saludable que la validación no venga del maestro sino de la situación misma y como resultado de las reflexiones de los niños.

OBJETIVOS

- Comparar colecciones desde el punto de vista cuantitativo.
- Comparar números orales y escritos.
- Comparar colecciones y números.
- Hacer evolucionar a los niños del *"mucho"* y *"más"* hacia el *"más que"*.
- Comprender que las informaciones numéricas permiten comparar colecciones.
- Comprender que se pueden ubicar los números unos con relación a los otros.

CONTENIDOS DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

NOTACIONAL	DENOMINACIÓN	CONCEPTUAL
Cada numeral	De los dígitos	Orden
Con función cuantitativa	Mayores a la decena: diversidad	Relaciones crecientes y decrecientes
Con función identificativa		
Usos diversos		

BIBLIOGRAFÍA

[1] D´Angelo, E.; Medina, A. y Rodríguez, A. (2000): "Una mezcla con distintos sabores. 0 a 5: la educación en los primeros años". *Ed. Matemática nº 22.* Buenos Aires, Novedades Educativas.

[2] Kaufman, A. M. (2000): *Letras y números*. Buenos Aires, Santillana.

[3] Nemirovsky, M. (1997): *¿Cómo organizar las actividades de enseñanza del sistema de numeración? Estructura de la planificación*. Mimeo.

[4] Parra, C.; Sadovsky, P. y Saiz, I.(1994): *Número, espacio y medida*. Documento curricular. Dirección Nacional de Gestión y Proyectos. Buenos Aires.

[5] Parra, C. y Saiz, I. (1994): *Didáctica de matemáticas*. Buenos Aires, Paidós.

EL CASINO EN INFANTIL

Pilar Rebolleda Tobar y
Marta Elena Flores López
CP El Parque, Rivas-Vaciamadrid

CÓMO SURGIÓ

Este proyecto surgió a partir de la idea de trabajar las Matemáticas de forma lúdica con los niños de tres años, porque consideramos que el juego favorece la adquisición de la lógica-matemática, y hemos continuado hasta los cinco años.

Partimos del supuesto del que el niño de Educación Infantil necesita jugar y es capaz de esforzarse y aprender aquello que a veces puede parecer que está por encima de sus capacidades, cuando lo que se le propone va impregnado de cierto carácter lúdico, ya que en el juego el niño pone en funcionamiento sus capacidades intelectuales, físicas, sociales, afectivas y emocionales.

OBJETIVOS

- Acercar el centro escolar a las familias, creando cauces de intercomunicación entre ambas realidades, tan importantes en la vida del niño.
- Superar progresivamente la etapa egocéntrica para poder adoptar el punto de vista del otro, aprendiendo a vivir la colaboración y el acuerdo, así como la oposición.
- Iniciar al niño en la aceptación de las reglas y/o normas por las que se rigen los diferentes juegos.
- Adquirir los conceptos lógico-matemáticos en un contexto lúdico.

COLABORACIÓN DE LAS FAMILIAS

No olvidamos la importancia que el papel de la familia juega en esta etapa y por ello se llevan a cabo estas actividades en colaboración con los padres y madres durante una hora semanal.

Se ha buscado esta colaboración para que los padres y madres se impliquen en el proceso de aprendizaje de sus hijos, para que conozcan a los niños con los que se relacionan y para que puedan observar el comportamiento de los hijos propios y ajenos fuera del contexto familiar.

CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL UTILIZADO

Los juegos que se elaboran, adaptan o reinventan:

- Deben facilitar las relaciones sociales en un ámbito cada vez más amplio, aprendiendo a articular progresivamente los propios intereses, puntos de vista y aportaciones, con los de los demás.
- Deben servir para utilizar el lenguaje oral de forma ajustada a las diferentes situaciones de juego.
- Deben desarrollar las posibilidades de las formas de representación matemática para describir algunos objetos y situaciones del entorno, sus características y propiedades, y algunas acciones que puedan realizarse sobre ellos, prestando atención al proceso y a los resultados obtenidos.
- Deben atender a diversos aspectos del currículo aunque su punto de partida sea el campo matemático.

El material que hemos utilizado lo podemos agrupar de la siguiente forma:

Material no elaborado

Hemos utilizado material que teníamos en las aulas y comprado algunos juegos que ya había en el mercado y podían ser interesantes para los niños.

Material elaborado

Dentro del material elaborado hay juegos que hemos encontrado en revistas y *libros del alumno* de algunas editoriales. También contamos con juegos que hemos realizado e inventado nosotras o con compañeras y amigas de otros centros.

Tanto en un tipo de material como el otro, después de estudiado, hemos visto cómo adaptarlo a las edades de los niños que tenemos, así como a los objetivos y contenidos que pretendíamos conseguir.

ORGANIZACIÓN DE UNA SESIÓN Y AGRUPAMIENTOS

Fase previa

Primero tendremos una reunión con los padres que van a colaborar para presentarles los juegos, las normas, así como la hoja de seguimiento en la que deben de recoger las incidencias significativas que se produzcan en cada uno de los juegos, según los aspectos concretos que queremos destacar.

Con sus observaciones y las nuestras, revisamos los juegos y se van introduciendo modificaciones.

Sesión tipo

La organización general de una *sesión tipo* pasa por los siguientes puntos:

- Los grupos son mixtos, es decir, se rompe la estructura de *grupo-clase* ordinario, aunque hay continuidad, ya que el nuevo grupo que se forma para estas actividades se mantiene de manera estable.
- Las actividades se desarrollan simultáneamente y con los mismos contenidos en cada una de las aulas del nivel, tratándose de seis juegos o actividades con un número variable de jugadores, según las características del juego, y un adulto en cada uno, que juega con los niños como un jugador más.
- La permanencia del adulto en ese juego es de dos/tres sesiones para mejorar su propia percepción del juego y organizarse mejor, cuanto más lo conozca.
- La duración de cada juego es diferente, de modo que no todos los jugadores terminan sus respectivos juegos al mismo tiempo; no se cambia de uno a otro juego de manera rotativa sino que los niños eligen a qué juego irán a continuación siempre que esté *vacío* y que no lo hayan repetido en esa sesión, teniendo en cuenta que todos deben pasar por todos los juegos.
- El papel de las profesoras en el transcurso de las sesiones es de asesoramiento, resolviendo dudas o conflictos, *guiando* las elecciones de los niños en función de las premisas mencionadas, proporcionando material, cambiando unos juegos por otros... Estas variaciones las hemos estudiado a la vista de la observación y la evaluación, y se realizan en función de lo motivadores que resulten o de lo repetitivos que les puedan parecer.

JUEGOS REALIZADOS

JUEGOS DE TABLERO **Juegos de dados sin números** ➢ La serpiente de colores. ➢ Juego del árbol. ➢ Los amigos. ➢ Los juguetes. ➢ El cuerpo. ➢ La casa.	• Los tres primeros son con dados de colores y su finalidad es completar el primero su tablero, con las fichas de colores. • Los otros juegos son dados con dibujos y su finalidad es completar el primero su tablero.

<table>
<tr><td>

Juegos con dados de números

Juegos de construcción

- Momo.
- Construyo un castillo.
- Construyo la muñeca.
- Ladrillo a ladrillo construyo mi castillo.
- El pueblo.

</td><td>

- La finalidad de estos juegos es ser el primero en poner todas las partes, de lo que tienen que construir, en su tablero.

</td></tr>
<tr><td>

Juegos de recorrido

- El colegio.
- Los juegos.
- La carrera de los caracoles. O de coches.
- El gran juego del circo.
- Los huevos de los dinosaurios.
- Sonidos de animales.
- La caza del mamut.
- Voy de compras.
- Voy al circo.
- Los dragones y los tesoros.

</td><td>

- Su finalidad puede ser llegar el primero a la casilla de llegada, tirando el dado y moviendo la ficha por las casillas tantas veces como indica el dado (los seis primeros juegos).
- También los hay en los que no gana el primero que llega sino que, una vez que han llegado, se comprueba quién ha conseguido las cosas que se piden (los cuatro últimos juegos).

</td></tr>
<tr><td>

JUEGOS DE MEMORIA VISUAL

- Mémori Fotos.
- Mémori animales.
- El Maxilince.
- El juego de la compra.
- Piruleta detective.
- Lince con dibujos en sombra.
- Animal escondido.

</td><td>

- La finalidad de los *Mémoris* es conseguir parejas de tarjetas en mayor número que el resto de los jugadores. Podemos ir aumentando su grado de dificultad bien por el número de parejas o bien por el tipo de relación (no de igualdad) que se establezca entre las parejas que se emparejan (dibujo-palabra, trabajador-instrumento de trabajo...).
- En el Maxilince y en los otros juegos que hay a continuación, la finalidad es encontrar el mayor número de objetos o dibujos lo más rápidamente posible.

</td></tr>
<tr><td>

PUZLES

- Con piezas de igual forma, tamaño y líneas rectas.
- Con piezas de igual forma, distinto tamaño y líneas rectas.
- Piezas de diferentes formas y líneas rectas.
- Con piezas de diferentes formas y líneas curvas.
- Rompecabezas.

</td><td>

- La finalidad es completar una imagen (fotografía, dibujo) que hemos partido en piezas (iguales o diferentes). Unas veces con modelo y otras sin él.

</td></tr>
</table>

JUEGOS DE CARTAS ➢ Juegos de tableros con cartas. ➢ Buscando la igual. ➢ La guerra. ➢ Las 5 familias. ➢ La escoba. ➢ El cinquillo. ➢ El chinchón.	• Los juegos de tableros de cartas les sirven a los niños de reconocimiento de la baraja. • Su finalidad será conseguir colocar todas las cartas de la baraja iguales a las que tienes en el tablero. • En el de la guerra, es conseguir el mayor número de cartas. • Hemos adaptado los juegos tradicionales de cartas (el cinquillo, la escoba, el chinchón) a los conocimientos previos que tienen.
LOTOS-BINGOS ➢ Loto *Delante-detrás.* ➢ Loto *El pescador y la jardinera.* ➢ Bingo foto-nombre. ➢ Bingo nombre. ➢ Loto nombre. ➢ Loto *Circo.*	• La finalidad de este tipo de juegos es ser el primero en conseguir unas tarjetas cuyos dibujos, fotos o palabras están en el cartón que tiene cada jugador.
DOMINÓS ➢ Dominó de fotos. ➢ Dominó de animales domésticos.	• Su finalidad es ser el primero en colocar todas las fichas.
MINIARCO	• Su finalidad es colocar todas las fichas en el estuche, de tal forma que si damos la vuelta al estuche, la figura que nos sale coincide con la que aparece en el libro.
JUEGOS DE DADOS SIN TABLERO ➢ Cara y cruz. ➢ Tripitas. ➢ El Senat. ➢ El Tirú. ➢ Las Tabas. ➢ Uno de cada color. ➢ La guerra. ➢ El mentiroso. ➢ No queda ninguna. ➢ Los tesoros.	*Juegos con dados de dos caras* • Monedas. • Conchas (como las de caurí). • Varillas (varillas redondeadas y plana por la otra). • Discos de piedras planas. *Juegos con dados de cuatro caras* • Las tabas. *Juegos con dados cúbicos* • Dados con caras no numéricas (colores, iconos,...). • Dados con caras numéricas (puntitos, números). • Dados con caras con símbolos póquer. • Su finalidad es la de ser el primero en desprenderse de las fichas que nos han entregado al inicio. • Su finalidad es la de ser el primero en conseguir tantas fichas como se haya acordado al inicio del juego.

CONCLUSIONES

La experiencia ha sido muy positiva, no sólo por los conocimientos que han asimilado a través de los juegos, sino por la relación que se ha establecido entre los niños de las dos aulas y entre ellos y los padres y las madres que han colaborado.

En esta experiencia, los grupos han sido mixtos dentro del mismo nivel, pero podría enriquecerse en próximos cursos la mezcla entre niños y niñas de distintos niveles en Educación Infantil y/o de Primaria de modo que, por ejemplo, los *mayores* ayuden a los *pequeños,* o que se les asigne distintas tareas a niños y niñas de similar grado de madurez que no tiene por qué coincidir con su edad cronológica, así se podrán realizar actividades conjuntas como talleres, juegos de mesa...

Animamos a los compañeros que estén interesados en trabajar las Matemáticas de una forma distinta, a que se embarquen en un proyecto como éste.

Educación Primaria

SOBRE LA NATURALEZA GEOMÉTRICA DE LA PUBLICIDAD

José Luis Belmonte Martínez
CAP de Leganés

Los símbolos creados por los humanos presentan, fundamentalmente, dos aspectos: los geométricos y los orgánicos. En este orden. Los comienzos de casi todas las civilizaciones estudiadas van unidos a representaciones esquemáticas de sus ideas, creencias, ídolos, temores,... Tras esta etapa surge la necesidad de un cierto *realismo* que da lugar a la aparición de formas más complejas y naturales. No obstante, la geometría se constituye en referente de buena parte de nuestras manifestaciones gráficas en cualquiera de sus épocas.

Elegimos como una de tales manifestaciones el logotipo como imagen que pretende sintetizar o simplemente identificar un determinado producto *consumible.* Prescindiendo de la semiótica de tales iconos, que no es asunto que hay que obviar ni carente de interés, en lo que sigue disfrutaremos con su estética y reparemos en algunas de sus propiedades.

Una conocida empresa de tecnología de la información y la comunicación se da a conocer con esta imagen que contiene más aristas de las que aparenta. Desde el sencillo descubrimiento de los irracionales que aparecen en esta trama podemos continuar construyendo, a partir de esta figura como "tesela unidad", un hexágono o un dodecágono regulares, o bien calculando las diversas proporciones que existen entre sus partes, o bien convirtiéndola en el desarrollo de ciertos cuerpos...

Las curvas que aparecen en la figura siguiente nos plantean una sugerente cuestión: ¿qué relaciones deben guardar los parámetros de las funciones

$$f(x) = b \text{ sen } ax$$
$$g(x) = -mx^2 + n$$

para que la parábola interseque un período de la sinusoide? Estudiar dilataciones y traslaciones sobre el sistema de ejes cartesianos atendiendo al valor de aquellos parámetros, enfrentarse a la necesidad del cálculo numérico para determinar intersecciones, calcular el área generada por ambas gráficas, a modo de ancestral casco..., son actividades que también puede generar este logotipo.

Otros diseños parecen una propuesta clara para resolver la suma de algunos términos de una sucesión o incluso de la insinuante serie que como iceberg asoma. Véanse, si no, los ejemplos siguientes que nos presentan desde la suma de los naturales

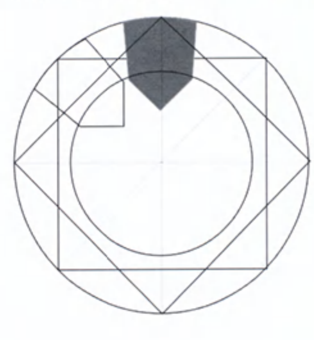
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

hasta la de los términos de progresiones geométricas bien conocidas bajo una estructura geométrica que ayuda a realizar su cálculo de manera simplificada.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots$$

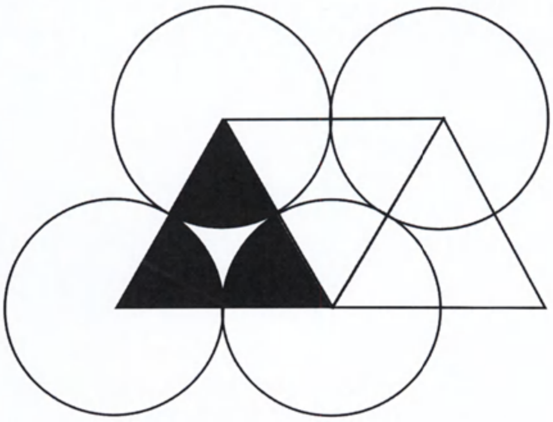
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Sobre las simetrías que muestra y esconde la siguiente imagen, esquema de todo un universo decorativo que utiliza esta entidad bancaria como símbolo que la identifica, se ha escrito abundantemente. Reparemos una vez más en su aspecto y, después, busquemos algunas de aquellas propiedades que le añaden, si acaso, un reflejo más a su brillo. Las estructuras que yacen bajo la mayor parte de los mosaicos islámicos nos remiten necesariamente a la geometría del cuadrado que, pese a su suprema sencillez, presenta una riqueza inusual como se observa, por ejemplo, en esta reconstrucción. Como tópico trataremos de averiguar la mínima porción del plano que sometida a los movimientos pertinentes genere la figura completa.



Podemos calcular el área coloreada de este triángulo, y su complementaria de color blanco, de diversas maneras, pero buscar la más sencilla –¿y más elegante?– es también un ejercicio de Matemáticas. De paso podemos apreciar la relación de este problema con el de empaquetamientos de esferas y su optimización.

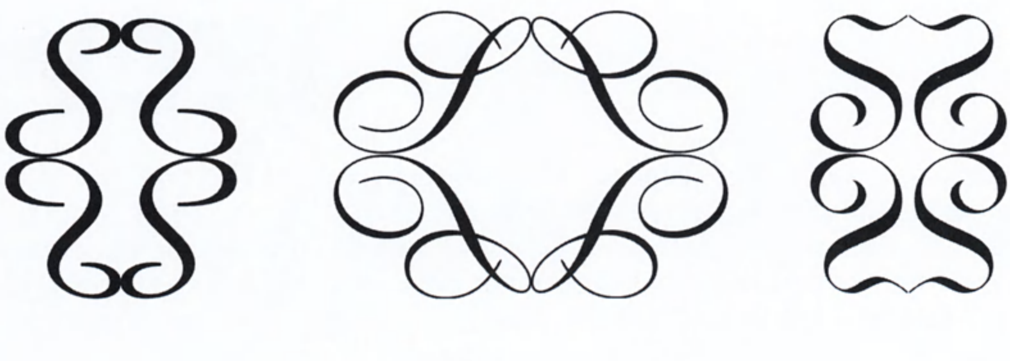
DIMENSION DATA HOLDINGS



Esta etiqueta que distingue a ciertas prendas de vestir y que parece remitirnos a símbolos ancestrales responde, en realidad, al producto de algunas reflexiones que resultan evidentes al observar más detenidamente el nombre de la marca:

LOEWE

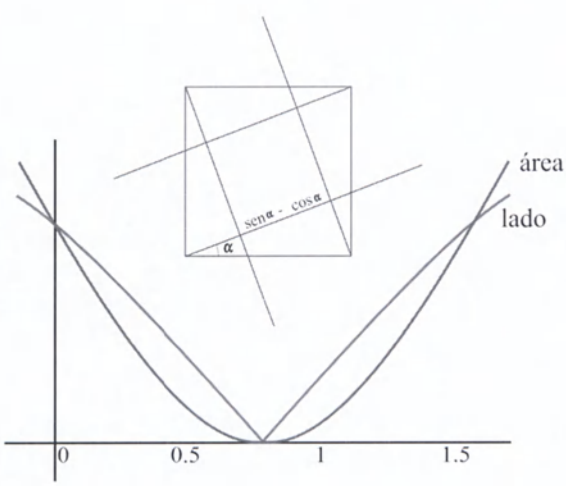
Podemos aceptar la sugerencia que nos proporciona este ejemplo y realizar el experimento de crear imágenes a partir de otras letras con un simple par de espejos o con cualquier programa procesador de imágenes; por supuesto que los resultados no suelen defraudar.



Y ya que nos encontramos sobre el plano y el número de coordenadas no impone exigencias demasiado penosas, podremos hallar sin dificultad las matrices que definen los movimientos generadores de estas figuras.

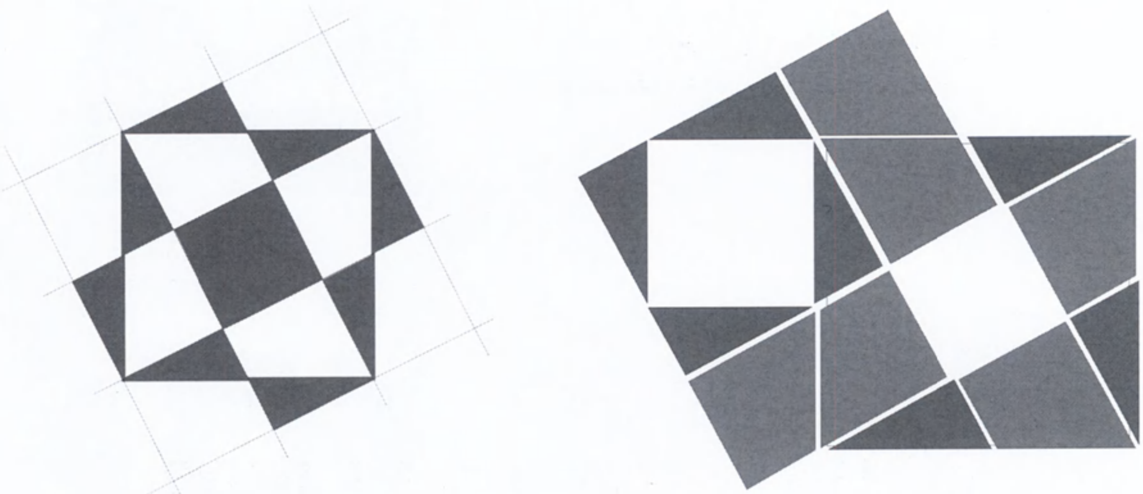
AROCASA
viviendas que invitan a vivir

La definición de un polígono se puede establecer a partir de muy diversos datos. De hecho la elección de los elementos necesarios para ello es un problema casi nunca trivial para nuestros alumnos. Quizá porque el propio concepto de definición es escurridizo. El caso siguiente nos ofrece una de esas definiciones –no muy habitual en los textos de Matemáticas– y, a la vez, nos permite cuestionar la pertinencia de la información que se presenta. Antes de nada deberemos dejar claro qué significa definir en esta ocasión. ¿Podemos prescindir de alguno de los polígonos oscuros para continuar *viendo* el triángulo claro? Evidentemente no, pero ¿qué ocurre al eliminar una de dichas figuras?, ¿cómo podemos modificar tales polígonos para que continúen definiendo un triángulo?, ¿se puede generar con tales "piezas" otros polígonos?...



Este es el anagrama de una universidad alemana, que toma prestada una construcción con una larga historia. Estudiar la variación de algunas de sus características en función de un cierto parámetro permite integrar en un mismo ejercicio diversos tópicos de cualquiera de los cursos de Secundaria o Bachillerato. Por ejemplo, en la figura podemos observar la variación del lado y del área del cuadrado interno en función del ángulo a indicado.

También podemos plantearnos qué proporción guardan el cuadrado pequeño y el grande. Este problema, ya estudiado[1], es especialmente atractivo e ingeniosa su solución en algunos casos particulares como el indicado a continuación. Incluso es posible su reconversión en puzle con el fin de buscar figuras equivalentes. En tal caso, podremos poner condiciones a los objetivos o bien dejar que la imaginación se aproveche de un momento de debilidad.



En realidad el catálogo es interminable y, evitando más referencias, podemos crear una galería de *obras* que ofrezcan su aspecto más o menos armonioso y/o nos provoquen con algunas de sus propiedades, celosamente ocultas. Consúmanse con toda la imprudencia, entre sus ingredientes no se conocen substancias nocivas, sólo el gusto estético de su diseñador y un elevado contenido en geometría.

[1] Ver Wilson, Jim (1996): *Explorations of a Problem with Two Squares*, Universidad de Georgia; Hirstein, Jim y Pagnucco, Lyle (1996): *Capturing Area and a Solution*, Universidad de Minnesota y Universidad de Montana. Ver también página <http:/jwilson.coe.uga.edu>

sageo

Samsonite
WORLDPROOF

icea

PELAYO
Mutua de Seguros

CANTREX

ASTRA
EL SISTEMA DE SATÉLITES

ACERALIA

EL CÁLCULO MENTAL EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Luis Ferrero de Pablo
CAP de Vallecas

EL CÁLCULO MENTAL Y EL CÁLCULO APROXIMADO

El cálculo que las personas hacemos en la vida diaria para resolver las situaciones cotidianas (comercio, mercado, etc.) se hace mediante cálculo mental, cálculo de cabeza.

Por medio del cálculo mental se desarrolla la concentración, la atención, el interés y la reflexión para decidir y elegir; la autoafirmación y la confianza en sí mismo, la flexibilidad en la búsqueda de soluciones, y la capacidad para relacionar, comparar, seleccionar o dar prioridad a unos datos frente a otros a la hora de operar.

Las bases del cálculo mental son el dominio de la secuencia contadora y de las combinaciones aritméticas básicas. Para conseguir un buen cálculo mental es necesario el aprendizaje de una serie de métodos y estrategias que permitan al alumno operar tanto en el cálculo mental aditivo (conmutación, descomposición, redondeo, conteo, duplicado, etc.), como en el cálculo mental multiplicativo (distribución, factorización, etc.). Todo ello mediante un proceso de exploración que permita no sólo conocer la existencia de determinadas estrategias, sino también reflexionar sobre ellas para elegir o utilizar la más adecuada en cada situación.

La estimación aplicada al cálculo está muy vinculada al cálculo mental y debe hacerse a partir del redondeo de cantidades como respuesta aproximada. Es conveniente que, desde los primeros momentos, se realicen actividades de cálculo de cantidades por redondeo y que se verifiquen muchos de estos cálculos relacionando la estimación con el cálculo exacto.

Realizar periódicamente cálculo mental, con la representación mental que requiere de números y operaciones, ayuda a descubrir la estructura básica de las operaciones elementales y fomenta la elaboración y el uso de estrategias personales para realizarlo.

La elección adecuada del método para efectuar un cálculo es cada vez más importante. Por ejemplo: la propina que se va a dejar en un restaurante se puede estimar mentalmente; en cambio, para rellenar el impreso de la declaración de la renta se utilizará la calculadora o un ordenador.

La escuela debe fomentar y potenciar el cálculo mental no sólo por su carácter instrumental sino, y principalmente, por sus valores formativos.

En resumen, el cálculo mental favorece en los alumnos, entre otras, las siguientes capacidades:

- Facilita una mayor agilidad mental.
- Potencia el desarrollo de las capacidades de concentración, de razonamiento, de atención, de observación, de reflexión, etc.
- Desarrolla la capacidad de interiorización.
- Favorece una mejor comprensión de las propiedades de los números y de las operaciones.
- Facilita una mayor aplicación práctica de la operativa a la vida cotidiana.
- Potencia la capacidad para relacionar, comparar, seleccionar o dar prioridad a unos datos frente a otros a la hora de operar.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Se debe buscar un equilibrio entre el cálculo mental, el cálculo escrito y la utilización de la calculadora.

Antes de utilizar métodos de lápiz y papel (cálculo escrito) deben desarrollarse técnicas de cálculo mental y de estimación.

A través de técnicas de aproximación numérica y cálculo mental se favorecerá la estimación.

El cálculo mental requiere mucho entrenamiento, debe practicarse diariamente.

Las técnicas de cálculo mental se deben ordenar en progresión de dificultad creciente y deben estar ligadas al aprendizaje de los diferentes contenidos del área.

Es aconsejable evitar las actividades de cálculo mental en las que hay que expresar el resultado de las operaciones propuestas únicamente de forma verbal, ya que se potencia la competitividad entre los escolares y hacen que se inhiban muchos de ellos, con lo cual se favorece sólo a unos pocos en perjuicio de la mayoría. Es por ello conveniente que se propongan actividades que permitan a los estudiantes expresar por escrito los resultados obtenidos.

ACTIVIDADES

Series de números

Escribir en el encerado una serie de unos diez números. Al cabo de unos segundos, diez o veinte, se borra la serie. A continuación, cada alumno tratará de escribir la serie en su cuaderno.

Conviene que la serie presente alguna regularidad o particularidad. Por ejemplo:

a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 21, 28, 36, ...

b) 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, ...

c) 255, 245, 235, 225, 215, 205, 195, ...

d) 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, ...

e) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ...

f) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

La rueda

Cada grupo de cuatro a seis jugadores dispone de una baraja española de cuarenta cartas, y coloca el mazo sobre la mesa boca abajo, excepto una carta que se pone al lado, boca arriba.

De forma correlativa, cada alumno o alumna levanta una carta del mazo, la pone sobre la carta que está boca arriba al mismo tiempo que efectúa la suma de los números que marcan ambas cartas.

El siguiente alumno levanta una nueva carta del montón, la pone sobre las dos que están boca arriba y suma sus puntos al total.

Así sucesivamente, los miembros del grupo de forma rotativa van efectuando las sumas pertinentes hasta llegar a 220, que es el máximo de puntos que se pueden obtener con una baraja de cuarenta cartas. Suponiendo que la sota valga 8, el caballo 9 y el rey 10.

Por ejemplo, la primera carta descubierta es el siete de oros; el primer jugador coge del mazo el tres de oros, entonces dice: "Siete y tres, diez" y deja la carta boca arriba sobre la anterior; el segundo jugador coge el caballo de copas, dice: "diez y nueve, diecinueve" y a continuación deja la carta sobre las dos anteriores, y así sucesivamente.

Una variante de este juego consiste en colocar una baraja boca abajo y, de forma correlativa, cada alumno levanta una carta del mazo. La pone boca arriba sobre la mesa, al mismo tiempo que resta de 220 el valor de la carta tomada; el siguiente alumno levanta otra carta del montón, la coloca sobre la anterior y resta del resultado anterior el valor de la carta tomada. Así sucesivamente, los componentes del grupo de forma rotativa van efectuando restas hasta que no quede ninguna carta.

El primero gana

Dos jugadores dicen alternativamente un número mayor que cero y menor que diez; el primer jugador que alcance cincuenta sumando todos los números que dice cada uno, gana.

Veamos el desarrollo de una partida jugada entre Amaya y Begoña:

- Amaya dice 7.
- Begoña suma 5, y obtiene 12.
- Amaya suma al resultado anterior el número 9 y obtiene 21.

- Begoña suma 3 y obtiene 24.
- Amaya suma 9 y obtiene 33.
- Begoña suma 8 y obtiene 41.
- Amaya suma 9 y obtiene 50.

La partida la gana Amaya porque ha sido la primera en alcanzar 50.

Las cuatro operaciones

Jugadores: de 2 a 4.

Materiales: tres dados y un tablero numérico.

8	35	16	6
15	14	20	11
9	40	7	29
12	18	24	36

El objetivo para cada jugador consiste en obtener los números que aparecen en la tabla realizando dos operaciones aritméticas con los puntos que se obtengan con los tres dados.

Por ejemplo, si con los tres dados ha obtenido los puntos 4, 2 y 6, puede realizar estas u otras operaciones:

$$4 \times 2 + 6 = 14$$

$$4 \times (2 + 6) = 32$$

$$2 \times (4 + 6) = 20$$

Reglas del juego

- Cada jugador, por orden, lanza los tres dados. Con los tres números obtenidos realiza dos operaciones aritméticas. Puede repetir operación.
- Escribe las operaciones realizadas en una hoja y tacha en la tabla el número obtenido.
- La partida termina cuando todos los números de la tabla estén tachados.
- Gana la partida el jugador que haya tachado más números.

Fuera lápices

Denomino así a esta actividad porque es aconsejable que los escolares no tengan el lápiz en la mano durante su realización; sólo lo utilizarán para escribir los resultados cuando se lo indique su maestro.

Para el desarrollo de la actividad se procederá de la siguiente forma:

- Primero, se pedirá a los alumnos que coloquen sobre la mesa una plantilla (ver Anexo I) en la que escribirán los resultados de las operaciones, similar a la que se indica en la figura, y un lápiz; el profesor escribirá en la pizarra un número cualesquiera, por ejemplo, el 75.
- Después, se propone a los alumnos que efectúen mentalmente una serie de operaciones encadenadas, enunciadas oralmente por el profesor, tomando como número de partida el que está escrito en la pizarra, y que escriban el resultado obtenido mentalmente en la plantilla de resultados. Por ejemplo, si las órdenes de cálculo son: "sumar dos", "restar cuatro", " sumar seis", "restar cinco", el desarrollo mental será: "75 + 2 = 77", "77 – 4 = 73", "73 + 6 = 79", "79 – 5 = 74".
- A continuación, el profesor expresará otro bloque de órdenes de cálculo y se repetirá el proceso.
- La corrección de resultados se hace de forma colectiva y después de varios bloques de órdenes de cálculo; por ejemplo, siete que es el número de resultados que se pueden escribir en cada línea de la plantilla.

Observaciones

- Hay que tener en cuenta que el número de órdenes de cálculo de cada bloque, como la complejidad de las operaciones, dependerán del nivel real de los escolares.
- Esta actividad puede resultar fácil o, por el contrario, difícil, dependiendo de la rapidez con que se exprese cada bloque de órdenes de cálculo.
- Para motivar a los alumnos más lentos y que puedan seguir el proceso, entre una orden de cálculo y la siguiente se dejará una pausa suficiente que les permita responder correctamente.

TÉCNICAS DE CÁLCULO MENTAL (SECUENCIADAS)

Contar de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, etc.

Contar de 10 en 10

Restar 10

Para restar 10 a un número, se quita 1 a su número de decenas: 374 – 10 = 364.

Sumar 11

Para sumar 11 a un número, se suma 10 y después se suma 1.

Restar 11

Para restar 11 a un número, primero se resta diez y después uno.

Sumar 9

Para sumar 9 a un número, se suma 10 y después se resta 1.

Restar 9

Restar 9 a un número, primero se resta 10 y después se suma 1.

Sumar 20 ó 30

Para sumar 20 ó 30, se suma 2 ó 3 a la cifra de las decenas.

Restar 20 ó 30

Para restar 20 ó 30 a un número, se quitan 2 ó 3 al número de decenas.

Sumar 100

Para sumar 100, se suma 1 a la cifra de las centenas.

Sumar 200 ó 300

Para sumar 200 ó 300, se suma 2 ó 3 a la cifras de las centenas.

Restar 100 ó 200

Para restar 100 ó 200, se quita 1 ó 2 al número de centenas: $638 - 200 = 438$.

Sumar 99

Para sumar 99 a un número, primero se suma 100 y después se resta 1.

Restar 99

Para restar 99 a un número, primero se restan 100 y después se suma 1.

Restar 101

Para restar 101 a un número, primero se resta cien y después se resta uno.

Multiplicar por 2

$45 \times 2 = 45 + 45 = 90$

$45 \times 2 = (40 \times 2) + (5 \times 2) = 80 + 10 = 90$

Multiplicar por 4

Para multiplicar un número por 4 se halla el doble de su doble.

Multiplicar por 10

Multiplicar por 11

Para multiplicar un número por 11 se suma el número al resultado de su multiplicación por 10.

Multiplicar por 21, 31, 41, ...

24 x 21 = 24 x (20 + 1) = 24 x 20 + 24 x 1 = 480 + 24 = 504

24 x 31 = 24 x (30 + 1) = 24 x 30 + 24 x 1 = 720 + 24 = 744

24 x 41 = 24 x (40 + 1) = 24 x 40 + 24 x 1 = 960 + 24 = 984

Multiplicar por 101

Para multiplicar un número por 101, se suma el número al resultado de su multiplicación por 100.

Multiplicar por 20

Para multiplicar un número por 20, primero se multiplica por 2 y después por 10.

Multiplicar por 30, 40, ...

45 x 30 = 45 x 3 x 10 = 135 x 10 = 1350

45 x 40 = 45 x 4 x 10 = 180 x 10 = 1800

Multiplicar por 100

Multiplicar por 5

Para multiplicar un número por 5, primero se multiplica por 10 y después se calcula la mitad del número obtenido.

Multiplicar por 9

Para multiplicar un número por 9, se resta el número al resultado de su multiplicación por 10.

Multiplicar por 99

Para multiplicar un número por 99, se resta el número al resultado de su multiplicación por 100.

Multiplicar por 19, 29, 39, ...

24 x 19 = 24 x (20 – 1) = 24 x 20 – 24 x 1 = 480 – 24 = 456

24 x 29 = 24 x (30 – 1) = 24 x 30 – 24 x 1 = 720 – 24 = 696

24 x 39 = 24 x (40 – 1) = 24 x 40 – 24 x 1 = 960 – 24 = 936

Multiplicar por 12

48 x 12 = 48 x 3 x 4 = 144 x 4 = 576

48 x 12 = 48 x (10 + 2) = 48 x 10 + 48 x 2 = 480 + 96 = 576

Multiplicar por 25

Para multiplicar un número por 25, primero se multiplica por 100 y, después se divide entre 4.

Multiplicar por 15

24 x 15 = 24 x 3 x 5 = 72 x 5 = 360

24 x 15 = 24 x (10 + 5) = 24 x 10 + 24 x 5 = 240 + 120 = 360

Calcular la mitad de un número

Dividir entre cuatro (calcular la cuarta parte)

Para calcular la cuarta parte de un número se calcula la mitad de su mitad.

Dividir entre 5

70 : 5 = 70 : (10 : 2) = (70 x 2) : 10 = 140 : 10 = 14

27 : 5 = 27 : (10 : 2) = (27 x 2) : 10 = 54 : 10 = 5,4

Dividir entre 25

45 : 25 = 45 : (100 : 4) = (45 x 4) : 100 = 180 : 100 = 1,80

ANEXO I

¡FUERA LÁPICES!

Alumno/a: ____

1 _______ 2 _______ 3 _______ 4 _______ 5 _______ 6 _______ 7 _______

8 _______ 9 _______ 10 _______ 11 _______ 12 _______ 13 _______ 14 _______

15 _______ 16 _______ 17 _______ 18 _______ 19 _______ 20 _______ 21 _______

22 _______ 23 _______ 24 _______ 25 _______ 26 _______ 27 _______ 28 _______

29 _______ 30 _______ 31 _______ 32 _______ 33 _______ 34 _______ 35 _______

36 _______ 37 _______ 38 _______ 39 _______ 40 _______ 41 _______ 42 _______

43 _______ 44 _______ 45 _______ 46 _______ 47 _______ 48 _______ 49 _______

50 _______ 51 _______ 52 _______ 53 _______ 54 _______ 55 _______ 56 _______

57 _______ 58 _______ 59 _______ 60 _______ 61 _______ 62 _______ 63 _______

64 _______ 65 _______ 66 _______ 67 _______ 68 _______ 69 _______ 70 _______

71 _______ 72 _______ 73 _______ 74 _______ 75 _______ 76 _______ 77 _______

78 _______ 79 _______ 80 _______ 81 _______ 82 _______ 83 _______ 84 _______

85 _______ 86 _______ 87 _______ 88 _______ 89 _______ 90 _______ 91 _______

92 _______ 93 _______ 94 _______ 95 _______ 96 _______ 97 _______ 98 _______

LA AVENTURA DEL KIOSCO

Silvia Martín y Valle Pachecho
Profesoras de Educación Especial, A.T.A.M.

PRESENTACIÓN

Vamos a presentar el trabajo que estamos desarrollando en el Centro A.T.A.M para potenciar el aprendizaje de las Matemáticas con alumnos de educación especial. Los aspectos de funcionalidad de los aprendizajes y de las destrezas presiden nuestra intención educativa y así es como recogemos de los alumnos la satisfacción de aprender las Matemáticas.

A lo largo de nuestra experiencia docente hemos ido constatando cómo la motivación es un elemento prioritario en la enseñanza y cómo las Matemáticas son una materia muy difícil y poco apetecible. Nuestro proyecto pretendía demostrar a nuestros alumnos que no sólo no son difíciles, –no olvidemos que se trata de sujetos con déficit cognitivo–, sino que les íbamos a presentar unas Matemáticas divertidas, útiles.

Nuestro fin será el proporcionar a nuestros alumnos destrezas matemáticas que van a aplicar a situaciones reales, muy motivadoras, y con posibilidad de extrapolar a la vida real, es decir, la generalización para una mayor integración y por ello buscamos una aplicación máxima a la realidad, pero no olvidamos el principio de asimilación de estos conceptos, contenidos y procedimientos, etc., refiriéndolos a la realidad.

Atendemos a una población de 65 alumnos entre los 3 y los 18 años, dentro de lo que serían las etapas de infantil, escolar y transición a la vida adulta.

Existe gran heterogeneidad respecto a las patologías, niveles cognitivos, motrices, académicos, etc. Ello en principio puede parecer que dificulta nuestra tarea, pero también nos ha llevado a realizar un mayor esfuerzo por enseñar a nuestros alumnos las Matemáticas.

Nuestro objetivo principal será el aprendizaje de conceptos, preferentemente matemáticos, a partir de una actividad muy motivadora para ellos: la compra de chucherías en el kiosco del colegio.

DESARROLLO DEL PROYECTO

La actividad consiste en aprender a elegir y comprar los diferentes productos que ofrece nuestro kiosco del colegio, entre ellos, chucherías, pequeños regalos, juguetes sencillos, bisutería, etc. Se inició como un Proyecto de Innovación dentro del Proyecto Educativo de Centro en 1996.

A lo largo de estos años la experiencia ha ido modificándose y se han ampliado los conceptos trabajados que abarcan desde el conteo, el uso de operaciones matemáticas, empleo del dinero, etc., hasta la distribución y el cálculo mental. Actualmente se sigue manteniendo como una actividad programada dentro del horario en vista de los óptimos resultados obtenidos con nuestros alumnos.

Uno de los actuales planteamientos de trabajo surgió a partir de reconocer que dicho proyecto, a pesar de los resultados tan positivos, también presentaba una importante laguna, el área de contenido de la medición.

El tema de las medidas seguía sin ser fácil para nuestros alumnos, de ahí surgió un nuevo proyecto *Matemáticas con sabor*. Se trataba de trabajar dichos conceptos a partir de la elaboración de sencillas recetas de cocina, donde se medían ingredientes, se calculaba el coste total tanto en pesetas como en euros, se controlaba tanto el tiempo como la temperatura, etc.

Aunque al principio se tratara de un proyecto para desarrollar el aprendizaje de las Matemáticas a partir de la compra de productos en el kiosco, no podíamos obviar otras áreas de trabajo. Nuestro modo de plantearnos la enseñanza siempre parte de un enfoque abierto e interdisciplinar, donde cada tutor ha tenido la posibilidad de adecuar contenidos, actividades y temporalización en relación a las características de su grupo, a sus capacidades motrices, sensoriales y/o cognitivas, dentro de las áreas de Conocimiento del Medio, Autonomía, Comunicación y, principalmente, de las Matemáticas.

METODOLOGIA

Cada profesor, a comienzo de la actividad, ha tratado de educar la materia que deseaba desarrollar de forma vivenciada y respondiendo a los niveles de sus alumnos según los conocimientos de conceptos básicos previos, el dominio de contenidos matemáticos y su aplicación, así como el nivel de autonomía para la ejecución de éstos.

A continuación vamos a presentar los principales objetivos trabajados de los cuales cada tutor extraía aquellos que deseaba desarrollar con su grupo.

Grupo de pequeños

El planteamiento se centraba en trabajar el comportamiento dentro del kiosco, controlándose ante unos estímulos tan motivadores: que permanecieran sentados y esperando su turno, que desarrollaran la capacidad de elección y demandaran el producto deseado. Por último, que asociaran el uso del dinero a la adquisición de una chuchería, de manera que daban una o varias monedas según el número de cosas sin importar el valor de las monedas.

Grupo de medianos

Aquí vamos a englobar a la mayoría de los alumnos. También se desarrollaba la capacidad de elección, el comportamiento correcto en una tienda y el vocabulario. Más concretamente en Matemáticas, lo trabajado consistía en colocar en la pizarra (ellos mismo o el profesor) el valor de cada producto y asimilar el concepto suma; posteriormente se pasaba a realizar la suma.

Respecto al cálculo de operaciones, se realizaban desde la suma de dos sumando con apoyo de dedos y ayuda del profesor, hasta colocar correctamente los sumandos y realizar la suma. En algunos casos, realizar la resta para calcular la vuelta. También se introduce el concepto de multiplicación haciéndoles ver su equivalencia con la suma de una misma cantidad.

Grupo de mayores

Aquí incluimos a los alumnos con mayor nivel de competencia en Matemáticas y a los de la etapa de transición a la vida adulta. Estos son los encargados de llevar el kiosco, de controlar cuando vienen personas que no son del colegio, de cobrar los pagos pendientes apuntados en un cuaderno, de preparar y reponer el kiosco de productos e incluso de su limpieza.

Incluimos aquí el tener que repartir grandes bolsas en paquetes pequeños, lo que supone trabajar el concepto de repartición y distribución y así se trabaja la división, apoyándonos en el uso de la calculadora y también, en cierta forma, la medida y el cálculo aproximado, de manera que deben rellenar cada bolsa y hacerlo más o menos con la misma cantidad.

Por último, son los encargados de controlar la compra, es decir, el ticket y el valor de cada producto, así como apuntar los productos que se van agotando. Al realizarse la compra al por mayor, ellos deben calcular el valor individual de cada paquete, siempre comprobándolo con la calculadora.

TEMPORALIZACIÓN

Cada profesor de los grupos primero y segundo acude al kiosco una vez a la semana. En el caso de los alumnos del segundo grupo, los medianos, se dedica al menos treinta minutos para que realice cada alumno el cálculo de su compra y utilice el tiempo que necesite para realizar los cálculos.

Para las tareas de mantenimiento de kiosco, cobro, etc., que realizan los mayores, la dedicación es diferente. Para la adquisición será como para el resto de compañeros, es decir, una vez a la semana, gastando un máximo de seis euros. Para las tareas de mantenimiento y limpieza se dedican dos tardes a la semana y para la preparación de bolsas y cálculo de precios, una mañana completa cada vez que se traen productos, es decir, cada dos meses.

RESULTADOS

Llevamos manteniendo esta actividad dentro del horario de cada grupo desde cinco años atrás, y ello a la vista de los óptimos resultados tanto en el conteo, colocación de operaciones, cálculo mental, uso de sumas y restas, utilización de dinero, etc. Las golosinas son tan motivadoras que nuestros alumnos aprenden con rapidez destrezas matemáticas para adquirirlas, e incluso son un elementos que utilizamos cuando aparecen disconductas, por ejemplo, cuando no quieren esforzarse saben que se quedan sin los productos que no calculan.

Como hemos dicho anteriormente, se está ampliando esta actividad a otros conceptos como distribución y uso de la calculadora, ya que nos interesa más que sepan qué operación han de elegir, y el cálculo de las operaciones que lo realice la calculadora.

Por último, destacaremos la implicación de la familia no sólo al aportar el dinero que necesitan sus hijos, sino que llegan incluso a realizarles pequeños encargos, o sugerencias de lo que les gustaría, y así nuestros alumnos también aprenden a compartir y comprar pensando en los demás.

Por lo tanto, cada vez nos afianzamos más en la idea de la necesidad de experiencias innovadoras en la enseñanza de las Matemáticas donde la motivación será elemento básico.

DOMINÓS: UN RECURSO PARA TODOS LOS BLOQUES TENIENDO EN CUENTA LA DIVERSIDAD

Lydia Vivas Arce
Colegio Bernardette

JUSTIFICACIÓN DEL USO DE MATERIALES Y RECURSOS EN EL AULA

Para comprender, asimilar, consolidar y aplicar los diferentes contenidos matemáticos, es necesario utilizar diferentes materiales y recursos.

En la Educación Primaria, los niños y niñas están en la etapa de las operaciones concretas y es donde más necesaria se hace la manipulación de materiales para poder interiorizar los conceptos que tienen que aprender.

Estos recursos y materiales ayudan, en un primer momento, a experimentar, y es el profesor quien tiene que procurar que sea de una forma reflexiva, potenciando una aproximación intuitiva y ayudándoles a crear una imagen mental de lo que queremos que aprendan. Los alumnos pueden tocar y observar propiedades para, posteriormente, poder abstraer y aplicarlo al contenido matemático que queremos que asimilen e interioricen. Los materiales son, por tanto, el mediador entre el profesor, el contenido y el alumno.

Por otra parte, el uso de materiales y recursos en el aula permite que el alumno no esté pasivo, actitud importante en el aprendizaje.

La enseñanza de las Matemáticas, en particular en la Educación Primaria, está cargada de procesos algorítmicos que tienen que aprender, consolidar y, fundamentalmente, saber aplicar. La mayoría de las veces les resulta aburrido y tedioso la mecanización de ciertas destrezas al hacerlo solamente con lápiz y papel. Por eso es importante la utilización de los juegos.

Los juegos son un recurso más y es una actividad que los niños y niñas utilizan de forma espontánea para aprender, teniendo en general un alto valor didáctico.

CARACTERÍSTICAS DE LOS RECURSOS Y MATERIALES

Los materiales y recursos que utilicemos en el aula deben ser variados. La aproximación a un contenido no debe hacerse a través de un único material o recurso, puesto que los alumnos pueden después tener dificultad para trascender del propio material y para simbolizar y expresar matemáticamente el contenido que queremos que aprendan.

Debemos seleccionar y organizar los diferentes recursos de que dispongamos en función de las características del alumnado y de qué y por qué queremos trabajar con ese recurso.

Es importante tener en cuenta cómo vamos a organizar la clase, el número de alumnos, los niños y niñas que tenemos con diferentes niveles de dificultades, etc.

LOS DOMINÓS

Jugando con dominós podemos trabajar los siguientes objetivos:

- Agilizar el cálculo mental, empleando las estrategias aprendidas.
- Contribuir al desarrollo de la socialización, fomentando las relaciones entre los alumnos, ya que es un juego de grupo.
- Trabajar distintos contenidos y relaciones entre ellos.
- Potenciar la atención, la observación y la reflexión.
- Aplicar la estrategia de análisis de posibilidades para poder cerrar el dominó.
- Desarrollar la imaginación, puesto que ellos también pueden construir dominós.
- Asegurar que entienden el proceso, puesto que tienen que trabajar la reversibilidad de las operaciones en la construcción de dominós.
- Atender a la diversidad: cada uno juega y fabrica el dominó en función de sus capacidades y conocimientos.

En qué consiste el dominó

El dominó es un juego compuesto por 28 fichas rectangulares divididas en dos mitades, cada una de las cuales tiene un número del 0 al 6, representado por puntos.

El juego consiste en colocar las fichas una al lado de la otra, formando una hilera con todas ellas, de modo que cada extremo de una fila toque a la contigua con el mismo número de puntos.

Cómo se juega al dominó

Se reparten las fichas entre cuatro jugadores, y una vez que sale el primer jugador con la ficha del 6 doble, se van colocando, por turno, las demás fichas, haciendo coincidir el número de puntos de los extremos de las fichas.

Gana el jugador que ponga todas sus fichas y pierde el que se quede con más puntos en la mano.

Pueden jugar dos o tres jugadores, teniendo la posibilidad de robar fichas cuando no tengan ninguna que encaje.

Se puede jugar sin ninguna estrategia y es posible que todo el mundo se quede con fichas en la mano por estar cerrada la posibilidad de seguir; en ese caso, el ganador es el que se queda con menos puntos.

Si se juega con estrategia, hay que ir analizando las posibilidades de los puntos que quedan sin salir y de los que se tienen en la mano, y de esta manera controlar la posibilidad que tienen el resto de los jugadores de poner o no poner ficha.

Cuántas fichas tiene un dominó

El dominó clásico es la combinación con repetición de 7 variables (del 0 al 6) tomadas de dos en dos, es decir, con todas las posibilidades de combinar las 7 variables contando también las repeticiones.

Si colocamos las 7 variables en una tabla de doble entrada vemos que:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0/0						
1	0/1	1/1					
2	0/2	1/2	2/2				
3	0/3	1/3	2/3	3/3			
4	0/4	1/4	2/4	3/4	4/4		
5	0/5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	
6	0/6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
Nº de combinaciones	7	6	5	4	3	2	1

Número total de combinaciones o fichas:

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

Si el número de variables fuera 4 y quisiéramos saber cuántas fichas ha de tener ese dominó, la tabla podría ser:

	Rojo	Azul	Verde	Blanco
Rojo	R/R			
Azul	R/A	A/A		
Verde	R/V	A/V	V/V	
Blanco	R/B	A/B	V/B	B/B
Nº de combinaciones	4	3	2	1

Número total de combinaciones o fichas:

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

Si tenemos 8 variables:

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$9$$

$$9$$

$$9$$

$$9$$

Tenemos (8 + 1) tantas veces como la mitad del número de variables 8/2 = 4

$$(8 + 1) \cdot 8/2 = 36$$

Generalizando y llamando n al número de variables, quedaría:

$$(n + 1) \cdot n/2,$$

que es la fórmula de la suma de los n primeros números naturales.

Construcción de un dominó

Se elige el contenido que se quiere trabajar y el número de variables; en función de éste nos saldrá un número de fichas, como acabamos de ver.

Una vez rellena la plantilla se pasan a las fichas pegadas sobre una cartulina u otro tipo de material resistente.

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

Diferentes tipos de dominós

Según el tipo de contenido, el dominó puede ser, entre otros:

- Clásico.
- De sumas y restas combinadas.
- De multiplicaciones.
- De divisiones.
- De fracciones, como operador, equivalencias.
- De operaciones con fracciones y con representación gráfica.
- De decimales.
- Del euro.
- De medida de ángulos.

He aquí algunos modelos:

DOMINÓ DE SUMAS Y RESTAS

	1		2		3		4		5		6		7	
1	4-3	0+1												
2	7-6	1+1	4-2	6-4										
3	5-4	3+0	0+2	9-6	5-2	7-4								
4	6-5	6-2	8-6	4+0	10-7	2+2	7-3	8-4						
5	3-2	5+0	10-8	4+1	11-8	2+3	9-5	10-5	6-1	12-7				
6	8-7	6+0	6-4	5+1	2+1	4+2	10-6	3+3	8-3	10-4	12-6	11-5		
7	11-10	7+0	7-5	6+1	6-3	5+2	11-7	4+3	7-2	9-2	7-1	8-1	10-3	11-4

DOMINÓ CON LOS RESULTADOS DE LAS TABLAS DE DIVIDIR

	2		3		4		5		6		7		8		9	
2	4:2	0+1														
3	6:3	1+1	6:2	27:9												
4	8:4	3+0	9:3	36:9	8:2	32:8										
5	10:5	6-2	12:4	45:9	12:3	40:8	10:2	35:7								
6	12:6	5+0	15:5	54:9	16:4	48:8	15:3	42:7	12:2	36:6						
7	14:7	6+0	18:6	63:9	20:5	56:8	20:4	49:7	18:3	42:6	14:2	35:5				
8	16:8	7+0	21:7	72:9	24:6	64:8	25:5	56:7	24:4	48:6	21:3	40:5	16:2	32:4		
9	18:9	90:10	24:8	81:9	28:7	72:8	30:6	63:7	30:5	54:6	28:4	45:5	24:3	36:4	18:2	27:3

APLICACIÓN EN EL AULA

Conviene jugar primero con todas las fichas boca arriba, plateándolo como un juego cooperativo, intentando poner todas y observando si quedan fichas sin poner y por qué ocurre. Después ya se puede jugar compitiendo.

También se puede plantear un torneo de la siguiente manera: se divide la clase por equipos, jugando 4 partidas cada equipo y quedando ganador el que menos puntos sume al final de las cuatro partidas.

Se puede jugar con diferentes tipos de dominós y cambiárselos después de cada partida, quedando un finalista por equipo.

Algunas observaciones útiles para el aula son:

- Las operaciones no deben ser de cálculo difícil, ya que si no el juego pierde agilidad.
- Es interesante utilizarlo como un recurso más para consolidar contenidos.
- La construcción de dominós por parte de los alumnos es un trabajo muy interesante, porque trabajan la reversibilidad de las operaciones, ya que, elegido un resultado, ellos buscan una operación y comprueban el dominio de un determinado contenido.

ATENDIENDO A LA DIVERSIDAD EN EL AULA

Como acabamos de ver, se pueden construir dominós para diferentes contenidos, grados de dificultad y número de variables. Por todos estos motivos es fácil adaptarlos a los diferentes niveles que tenemos en una clase.

A veces es conveniente jugar con aquellos alumnos que tienen más dificultades, o también ayudarles a fabricar su propio dominó.

La construcción por parte de los alumnos nos permite que, cuando un grupo está elaborando dominós, otros estén jugando, que es menos complicado.

CONCLUSIONES

Como hemos visto, a partir de un juego se pueden hacer las Matemáticas más interesantes.

Además de divertirse, los alumnos están desarrollando la inteligencia, están elaborando estrategias y están potenciando el pensamiento creativo.

Así mismo se les está estimulando la educación en valores, como son la cooperación, la aceptación de normas y el trabajo en equipo.

Están poniendo en movimiento lo que han aprendido, consolidándolo y comprobando si realmente han adquirido la destreza necesaria para aplicar lo que ya saben a un juego.

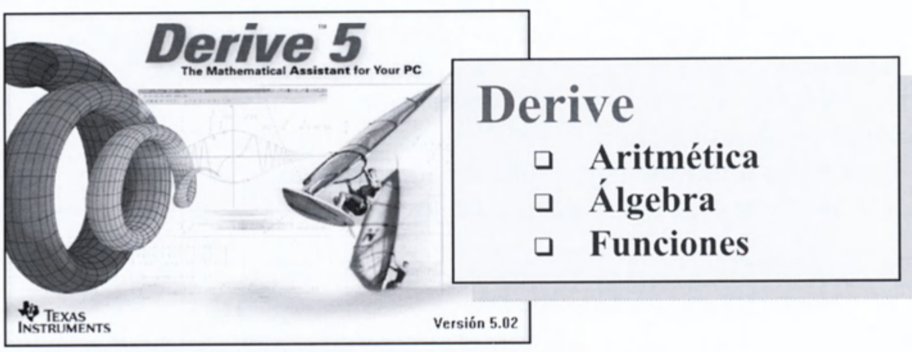
Educación Secundaria

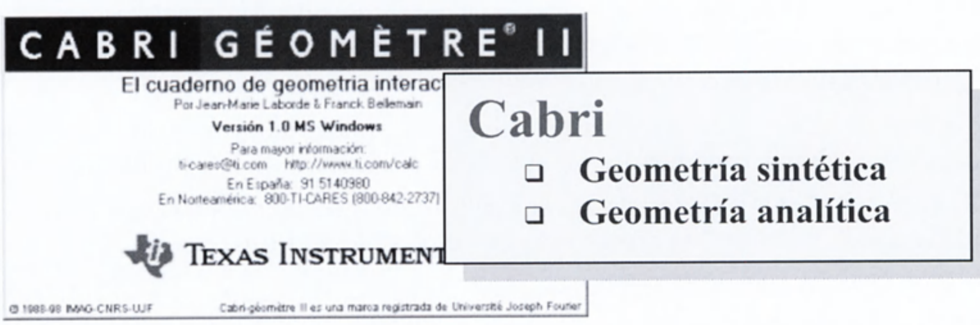
PROYECTOS DE FORMACIÓN E INVESTIGACIÓN SOBRE EL USO DE NUEVAS TECNOLOGÍAS EN MATEMÁTICAS EN LA ESO Y LOS BACHILLERATOS[1]

José María Arias Cabezas
IES Mariano José de Larra

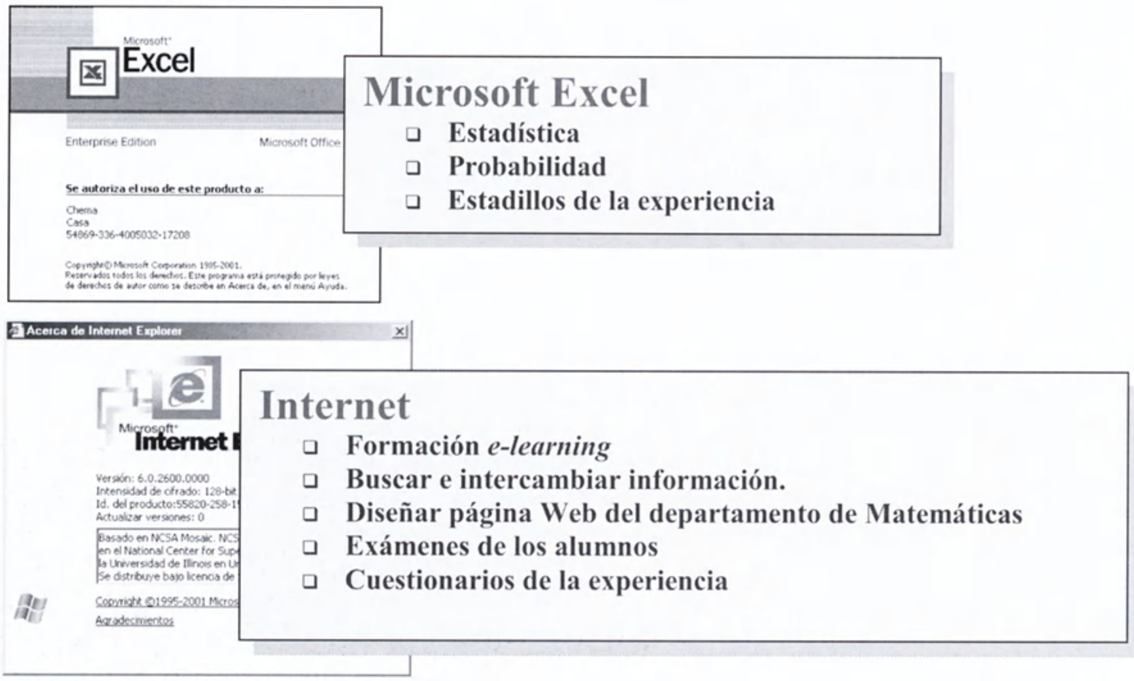
Ildefonso Maza Sáez
IES Antonio López García

PROGRAMAS UTILIZADOS Y CONTENIDOS EN LOS QUE SE HAN USADO





[1] Este Proyecto está apoyado por el Centro Regional de Innovación y Formación (CRIF) *Las Acacias* de la Dirección General de Ordenación Académica y por el Instituto Universitario de Ciencias de la Educación (IUCE) de la Universidad Autónoma de Madrid, coordinado por Isabel García (CAP Madrid Norte), Macario Gallego y Juan Ramón Villar (CRIF *Las Acacias*).



PLANTEAMIENTO DE LA EXPERIENCIA

Se plantea una investigación en la acción sobre el uso de las Nuevas Tecnologías en el área de Matemáticas, con la intención de contrastar la incidencia que éstas tienen en el rendimiento del alumnado. Para realizar la investigación, se imparte un curso de formación para los profesores que la van a realizar, en el que se les forma en el uso de los programas informáticos que se van a utilizar con el alumnado. También se diseñan y se hacen unos *Cuadernos de trabajo* para el aula que usará el alumnado en clase durante la investigación.

OBJETIVOS DE LA EXPERIENCIA

- Desarrollar materiales para todos los contenidos de Matemáticas de la ESO y Bachillerato que se publicarán en cuatro cuadernos por el IUCE de la Universidad Autónoma de Madrid.
- Formar al profesorado en el uso de los programas que se utilizan a través de un curso de 60 horas organizado por el CRIF Las Acacias de la Comunidad de Madrid.
- Realizar una investigación en la acción docente que se hará en los centros de secundaria donde trabajen los profesores participantes en el proyecto.

CURSO DE FORMACIÓN

Metodología para el curso de formación

El curso de formación se realizará de forma eminentemente práctica. Para ello, el profesorado llevará a cabo durante el curso un conjunto de actividades guiadas de forma similar a como se trabajará posteriormente en el aula con el alumnado. Esto se consigue trabajando con los materiales que se van a usar en el aula (cuadernos) y organizando la clase de la misma forma que debe estar organizada con los alumnos.

Punto de partida en la organización de la clase

Se les da a los profesores las mismas normas que al alumnado: en las mesas y en las sillas de los ordenadores, solamente se colocarán el libro y el cuaderno. Colgarán el resto de las cosas (como pueden ser la mochila y las prendas de abrigo) en el perchero, o en otro lugar de la clase, así no les molestarán a ellos ni a sus compañeros.

Trabajo en clase por parejas

Se trabaja en clase con dos alumnos por ordenador. Las funciones de cada uno de los alumnos son:

a) Escribir en el teclado.
b) Utilizar el ratón.
c) Hacer todo cuanto le ordene su compañero.

El otro alumno se sienta a su izquierda para no molestarle en el uso del ratón. Sus funciones son:

a) Leer las actividades del cuaderno.
b) Comprobar que su compañero hace correctamente los ejercicios en pantalla.

Cada actividad o cada dos actividades, los alumnos cambian de funciones.

Forma de hacer las actividades

Las actividades de cada tema se harán en el siguiente orden:

- Primero las actividades que están en el *Paso a paso.*
- Segundo leer el *Así funciona.*
- Por último, hacer las actividades del *Práctica.*

INVESTIGACIÓN

Tipo de centros y ubicación

Tipo de centros

- Públicos
- Privados-concertados
- Privados

Ubicación de los centros

- Madrid capital
- Madrid provincia

Población

Han participado en la experiencia:

- 15 Centros de Apoyo al Profesorado (CAP)
- 31 Centros experimentales
- 72 Profesores
- 1.556 alumnos

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN (FORMACIÓN Y EXPERIMENTACIÓN) REALIZADA DURANTE EL CURSO 2001/2002

Los resultados se clasifican en tres partes:

1) Comparación de medias de los resultados obtenidos por el alumnado.
2) Satisfacción y valoración del aprendizaje del alumnado.
3) Evaluación del profesorado:
   a) Realizada a través de los cuestionarios de los autores.
   b) Realizada por el CAP Norte.

1. Comparación de medias de los resultados obtenidos por el alumnado

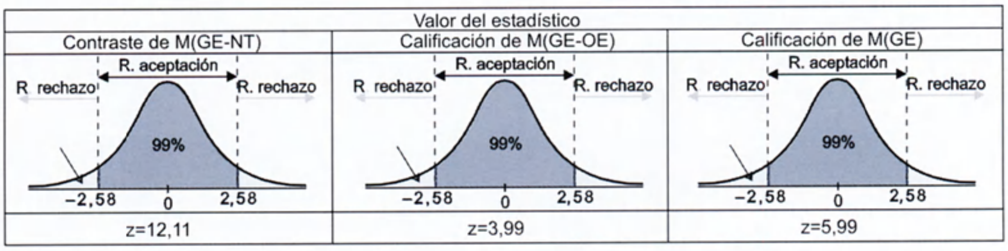
- M(GE): Calificación media de los resultados del alumnado que ha trabajado en Nuevas Tecnologías (NN.TT), es decir, de los Grupos Experimentales. Se divide en:
  - M(GE-NT): calificación media de los resultados con pruebas de evaluación con uso de NN.TT, es decir, de los Grupos Experimentales.
  - M(GE-OE): calificación media de los resultados con pruebas de evaluación sin uso de NN.TT, es decir, de los Grupos Experimentales.

- M(GC): calificación media de los resultados del alumnado que no ha trabajado en NN.TT, es decir, de los Grupos de Contraste.

El intervalo de confianza de las medias con un nivel de confianza del 99% es:

	Calificaciones			
Categoría	M (GE-NT)	M (GE-OE)	M (GE)	M (GC)
Media	6,69	5,4	5,65	4,82
Intervalo (99%)	(5,37; 9,09)	(5,37; 6,59)	(5,34; 7)	

En un contraste bilateral el valor del estadístico con un nivel de confianza del 99% es para los distintos grupos:

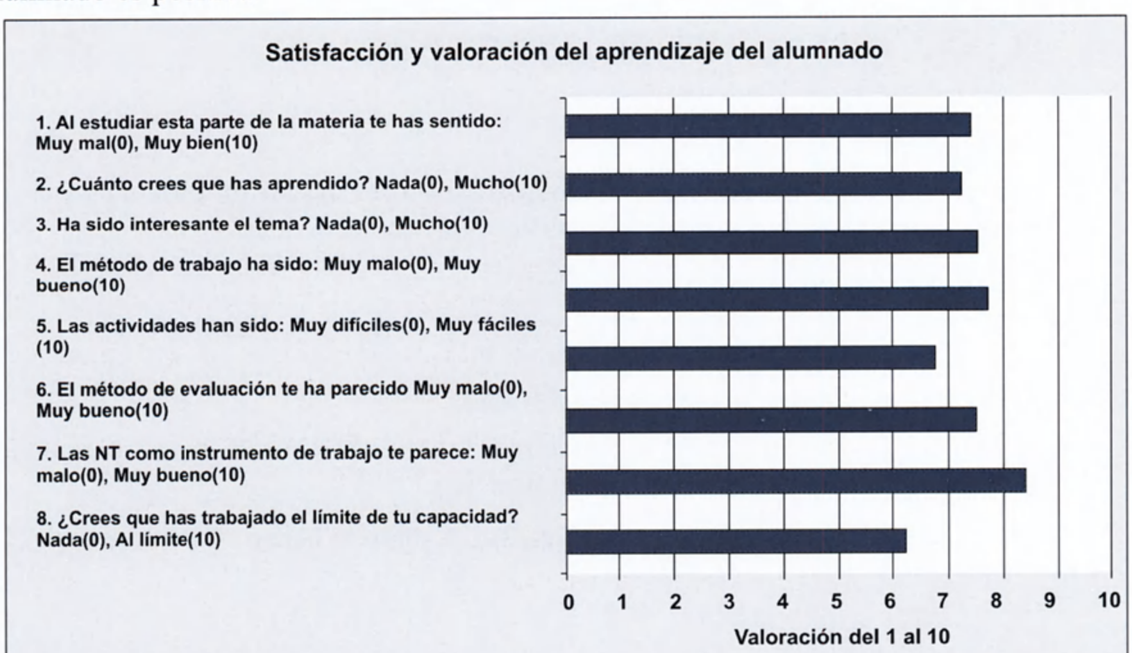


Los resultados analizados a la fecha nos indican una tendencia a la mejora del rendimiento escolar.

Hay que destacar que el grupo piloto mejora sus rendimientos en las pruebas de evaluación estándar que no usan NN.TT. Es decir, parece que el trabajo con NN.TT posibilita un aprendizaje significativo cuya evaluación positiva se deja notar en exámenes tradicionales.

2. Satisfacción y valoración del aprendizaje del alumnado

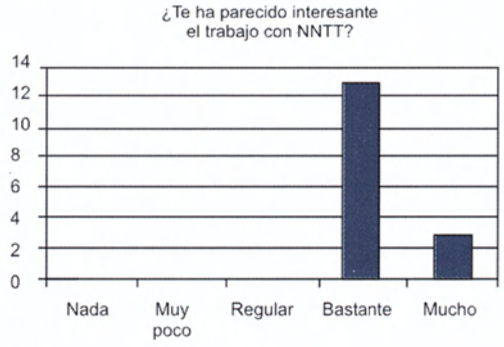
Como se observa en el gráfico adjunto la satisfacción y valoración del aprendizaje del alumnado es positiva.

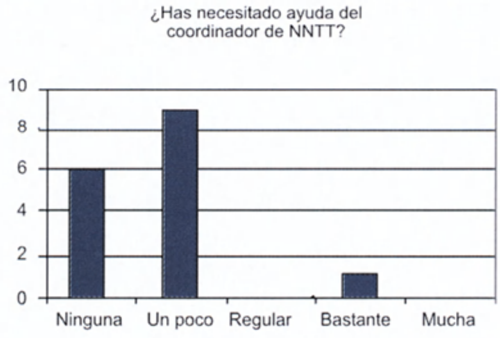


3. Evaluación del profesorado

a) Realizada a través de los cuestionarios de los autores.

Como puede verse en los gráficos la valoración que el profesorado hace sobre el proyecto y su aplicación a su actividad docente ha sido positiva.





b) Realizada por el CAP Norte.

La valoración que los profesores han realizado en el CAP Norte sobre el proyecto es muy positiva obteniéndose unas calificaciones medias de 82,4%.

Cabe destacar como aspecto más positivo:

- El material didáctico aportado que se puede llevar directamente al aula.

Cabe destacar como aspectos menos positivos:

- Se debería dedicar tiempo a contemplar la organización del centro para poder llevar a cabo la experiencia con los alumnos.
- Se debería dedicar más tiempo a formación sobre la hoja de cálculo Excel.

LA GEOMETRÍA DE LOS PUZLES

Jesús García Gual
IES Conde de Orgaz

PUZLES DE ÁREA

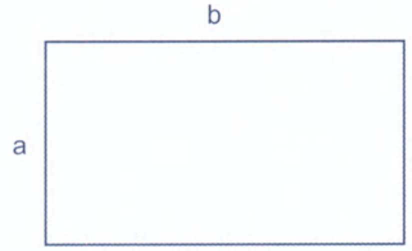
Los conceptos de área y volumen están ligados a la perpendicularidad entre medidas. Así sus patrones naturales son el rectángulo y el ortoedro. La geometría griega abordó desde el principio la descomposición de una figura y su transformación en otra conocida para la justificación de su fórmula de medida, una especie de racionalidad geométrica. La imposibilidad de la extensión de esta idea a todas las figuras curvilíneas introdujo la aproximación como segunda regla para completar nuestro catálogo de objetos medibles.

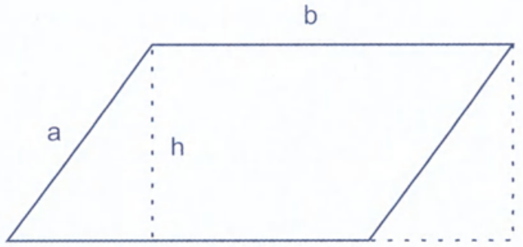
El retorno a los puzles (entendidos en su acepción de mapas de piezas) permite un desarrollo lógico y motivador de aspectos geométricos que relacionan medidas y movimientos, y que en el plano no requieren complejos razonamientos, lo que permite su uso metodológico en nuestra enseñanza primaria y secundaria.

Repasemos los puzles de área de las figuras elementales del plano. En ellos la intención es doble: relacionarlos con su fórmula de área y buscar un menor número de piezas simples.

Partimos del área del rectángulo:

Área del rectángulo = b x a





Puzle del paralelogramo (apoyado en su lado más largo)

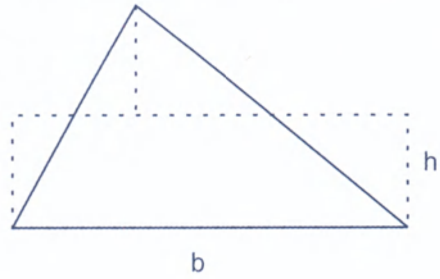
Área del paralelogramo = b x h

(Observemos que basta trasladar una de las piezas para llegar a la otra forma).

Puzle del triángulo (apoyado en su lado más largo)

Área del triángulo = $b \text{ x } \frac{h}{2}$

(Observemos que los movimientos de las piezas son simetrías centrales).

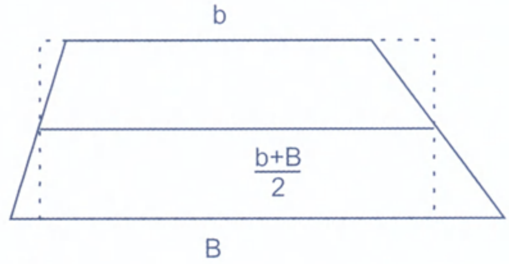


Para los casos particulares de triángulo rectángulo –apoyado sobre un cateto– y triángulo isósceles –apoyado sobre su *base*– obtenemos puzles de dos piezas y áreas respectivas $b \times \frac{a}{2}$ y $b \times \frac{h}{2}$

Hagamos un inciso para comentar que el área del triángulo puede ser perfectamente razonada como mitad de un paralelogramo, pero ello no puede ser considerado como un puzle del triángulo, aunque sí puzle de una forma equivalente de razonar (en el plano y el espacio con polígonos y poliedros) a través de la adición de figuras.

Puzle del trapecio

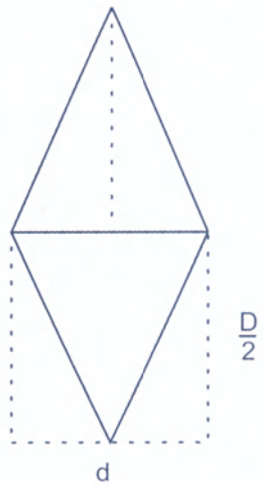
$$\text{Área del trapecio} = \frac{b+B}{2} \times h$$



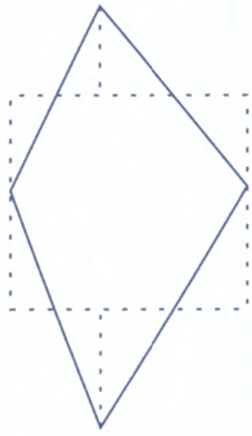
(El puzle sólo tiene tres piezas. Se señala la paralela media y su papel de media).

(Puzles de menos piezas para trapecios rectángulos e isósceles. Relación entre triángulos y trapecios: puzles de dos piezas que los transforman en paralelogramos).

Puzle del rombo y puzle del cuadrilátero convexo de diagonales perpendiculares



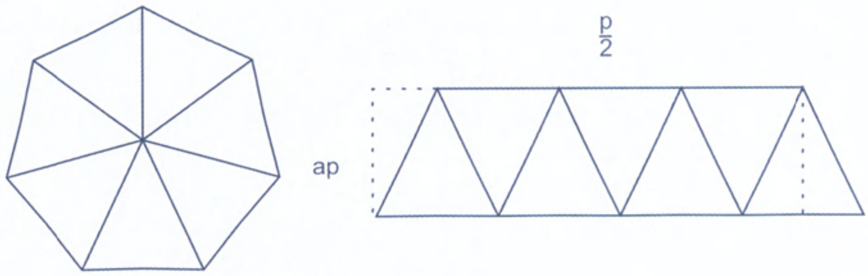
$$\leftarrow \text{Área} = \frac{\mathbf{D}}{2} \times d \rightarrow$$



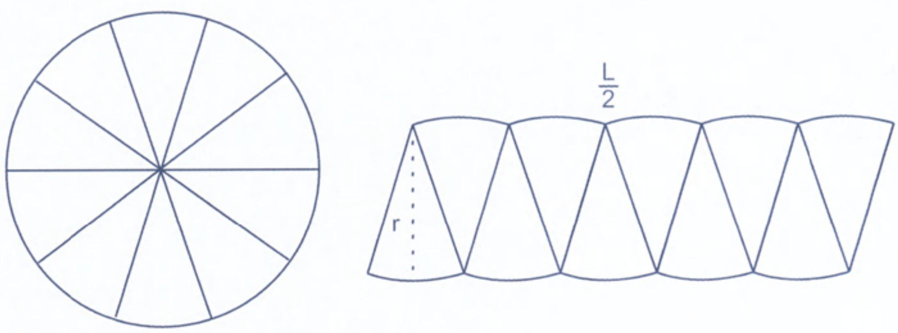
(3 y 5 piezas respectivamente. El rombo es un paralelogramo y, por tanto, con dos piezas se convierte en rectángulo, pero ése no es su puzle de área).

Puzle del polígono regular

$$\text{Área del polígono regular} = \mathbf{ap} \times \frac{\mathbf{p}}{2}$$



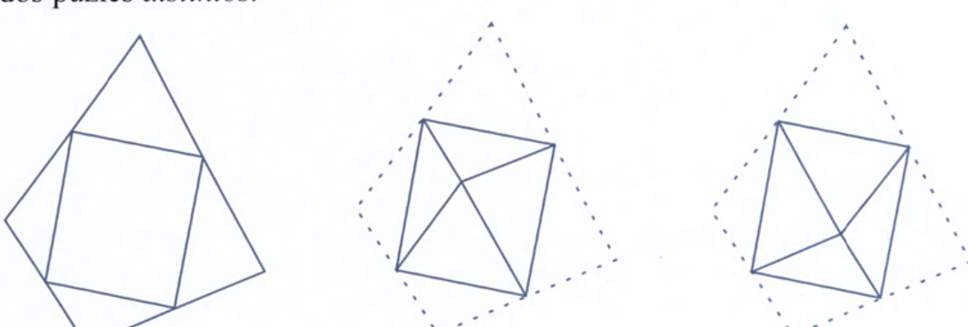
(El puzle es mejorable en un polígono regular concreto, pero éste es común a todos, y además permite relacionar el área y el perímetro de una circunferencia, considerada ésta como un polígono regular de infinitos lados).



$\mathbf{S_n} \approx \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{L}}{2}$ (relación entre longitud y área de la circunferencia)

Puzle del cuadrilátero convexo

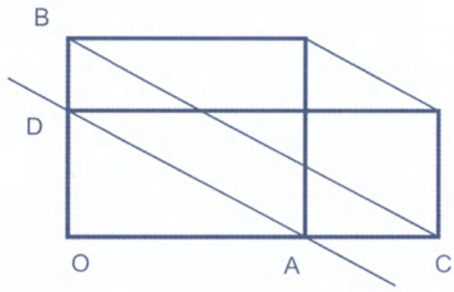
Usando los puntos medios de los lados de un polígono convexo obtenemos un paralelogramo interior con cuatro triángulos en sus lados. Estos cuatro triángulos son un puzle del paralelogramo. Pueden ser transportados a su interior mediante traslaciones de dos triángulos opuestos y giros de 180º de los otros dos, obteniendo, según el movimiento de cada pareja, dos puzles *distintos*.

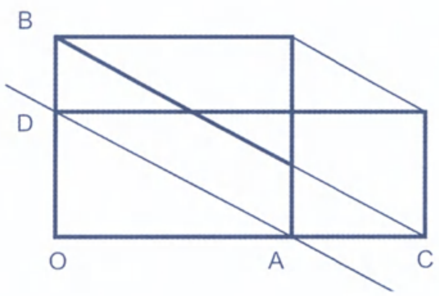


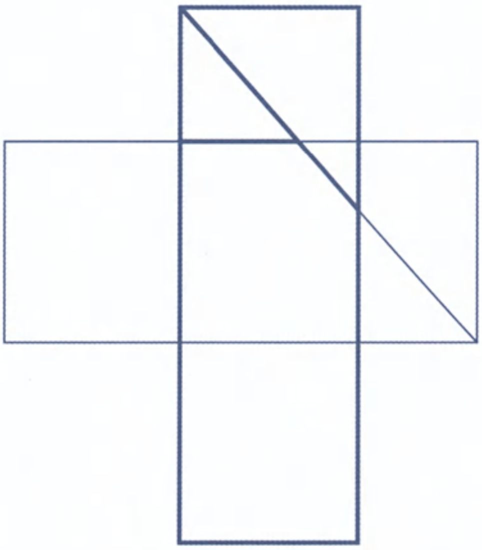
Aunque el puzle tiene también sentido de área (el área del polígono convexo es el doble del paralelogramo) y permite, con determinantes, dar una fórmula en función de las coordenadas de los vértices, nos atrae por su sencillez y sorpresa.

Puzle de rectángulos equivalentes

La misma construcción del rectángulo de lado **OC** equivalente al de lados **OA** y **OB** nos proporciona las piezas del puzle:







El número de piezas del puzle depende del tamaño relativo de los lados de uno y otro rectángulo. Nos bastarán tres piezas si la base mayor es menor que el doble de la base menor del otro; cuatro piezas si es mayor que el doble y menor que el triple;... Habrá que añadir a las tres piezas básicas del puzle una, dos,... piezas rectangulares iguales a la intersección de los rectángulos de partida.

Observemos que hasta ahora todos los puzles, salvo el genérico del polígono regular, pueden ser resueltos con traslaciones y simetrías centrales. Podemos enunciar dos importantes resultados:

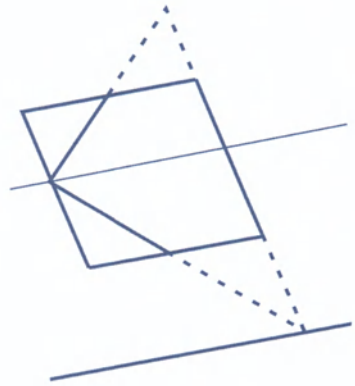
A: En el plano dos polígonos equivalentes en área pueden ser troceados de forma común (con piezas congruentes).

B: Se puede conseguir una partición común que sólo exija movimientos de traslación y simetrías centrales para pasar las piezas de una a otra figura.

A es resultado de que todo polígono (convexo o no) puede dividirse en triángulos, cada triángulo en un rectángulo y cada rectángulo en un rectángulo de lado dado. Luego las dos figuras poligonales pueden acabar convertidas en una yuxtaposición de rectángulos de lado definido. Ambas yuxtaposiciones forman dos rectángulos congruentes que, superpuestos con sus piezas correspondientes, nos producen mediante sus intersecciones las piezas finales comunes.

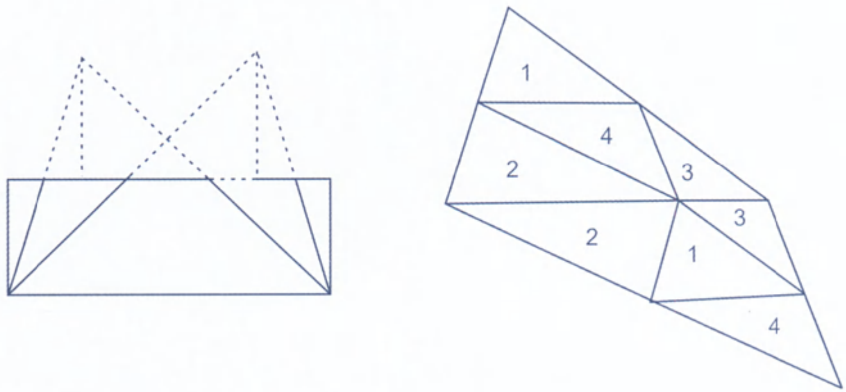
B es resultado de *A* y que el puzle de rectángulos equivalentes se resuelve con traslaciones y simetrías centrales, y de que es posible hacer un puzle que transforme un triángulo en un paralelogramo de base paralela a una dirección dada usando sólo estos movimientos.

Vemos en esta figura cómo el triángulo grande, a través de puntos medios, se transforma en un paralelogramo cuya base tiene la dirección prefijada por el segmento de abajo.



(Retamos al lector curioso a resolver el puzle del heptágono regular usando sólo traslaciones y simetrías centrales y con pocas piezas).

Puzle de dos triángulos equivalentes que comparten base (y por tanto tienen igual altura)

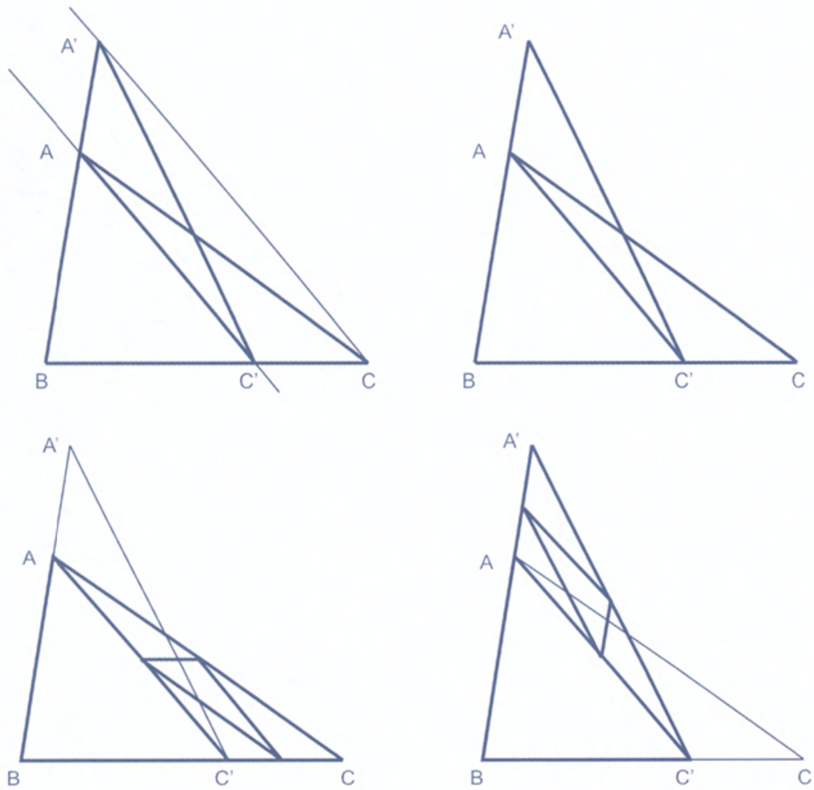


Si bien el puzle de la izquierda no necesita muchas piezas (cinco), hay que modificarlo si alguno de los ángulos de la base es obtusángulo, o si los dos triángulos se cortan más abajo de media altura. Lo mejora el puzle de la derecha, consistente en simetrizar uno de los triángulos respecto a la base y usar el puzle del cuadrilátero convexo.

Puzle de dos triángulos equivalentes que comparten un ángulo

La construcción del triángulo equivalente de ángulo compartido es otro ejercicio de teorema de Tales.

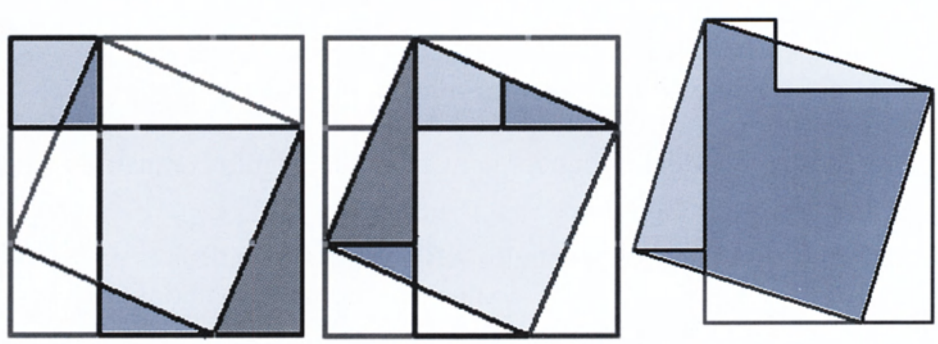
La equivalencia de los triángulos **ABC** y **A′BC′** conlleva la de los triángulos **A′AC** y **C′CA**, que comparten el lado **AC**, lo que permite transformarlos con el puzle anterior.



PUZLES PITAGÓRICOS

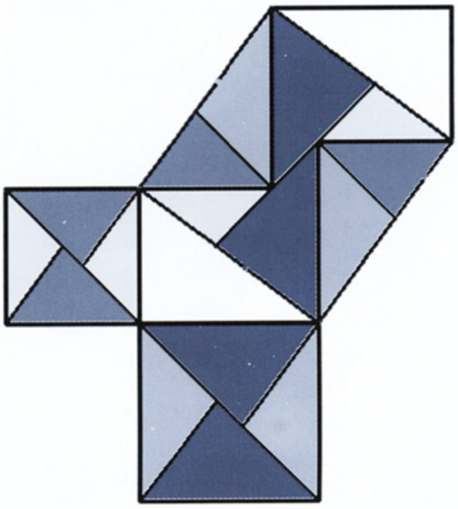
Muchas demostraciones del teorema de Pitágoras son puzles de tipo aditivo. Se demuestra que la suma de las áreas de los cuadrados catetos es igual al cuadrado hipotenusa añadiendo figuras iguales a ambos dibujos hasta conseguir un marco común. Son equivalente en polígonos ambos métodos: la equicomposición y la equiadición. En este trabajo nos hemos centrado en el primero.

Puzle de la demostración china del teorema de Pitágoras

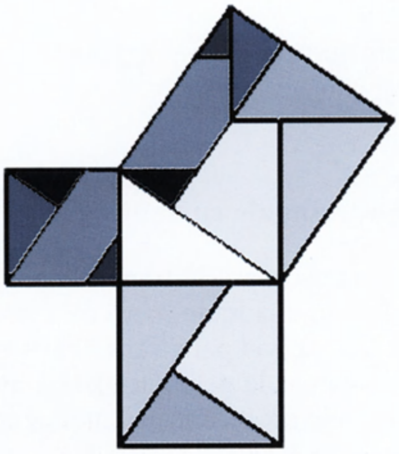


Puzle mínimo (4 piezas)

Puzle de la demostración del teorema en los *Libros* de Euclides

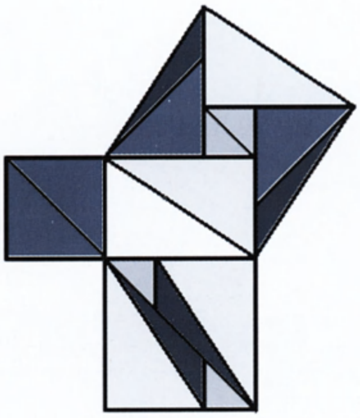


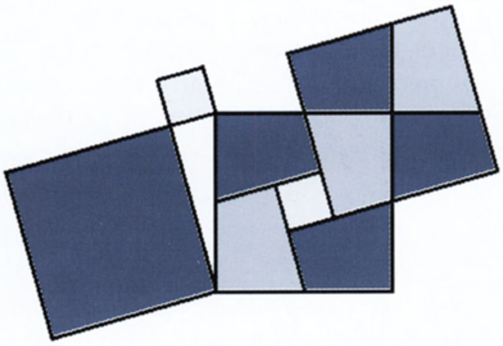
Puzle del teorema del cateto



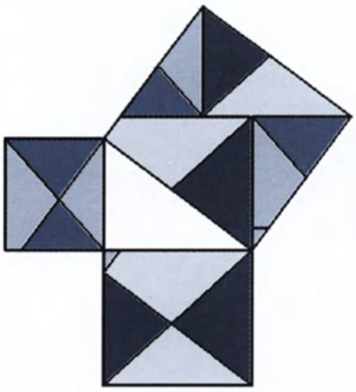
(El puzle del teorema del cateto puede ser resuelto en general con seis piezas –tres para transformar cada cuadrado cateto en rectángulo–, pero nos gusta esta forma de resolver el puzle pues se resuelve con traslaciones, respetando la dirección inicial de las piezas).

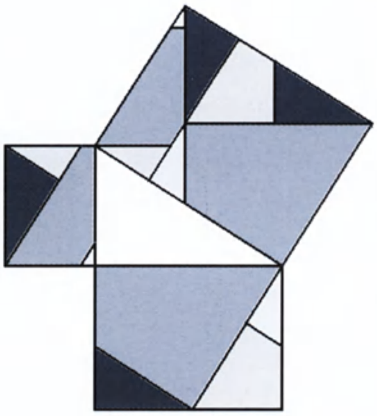
Puzles con cuadrado central

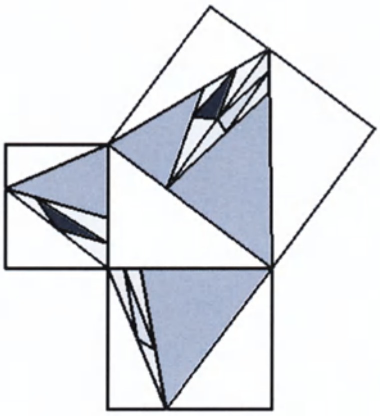




Sumas de rectángulos y triángulos equivalentes a partir de puzles pitagóricos





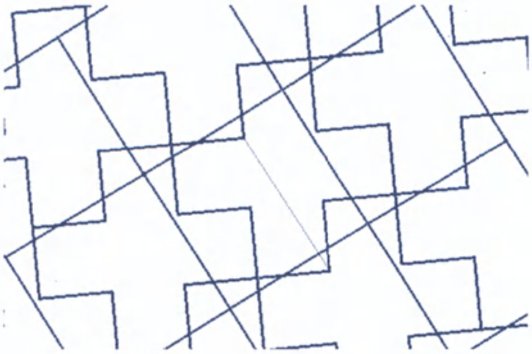


El puzle de la izquierda usa técnicas del puzle de la demostración de Euclides.
El central está resuelto a través del puzle del teorema del cateto.
El de la derecha usa el puzle de triángulos equivalentes que comparten ángulo.

OTROS PUZLES

Puzle de Dudeney para un triángulo cualquiera

Creo que Dudeney[1] lo pensó para la transformación de un triángulo equilátero en un cuadrado, pero más adelante se vio que la construcción servía para transformar un triángulo cualquiera. Tiene además la peculiaridad de que la transformación puede hacerse moviendo las piezas conectadas entre sí en algunos de los vértices.



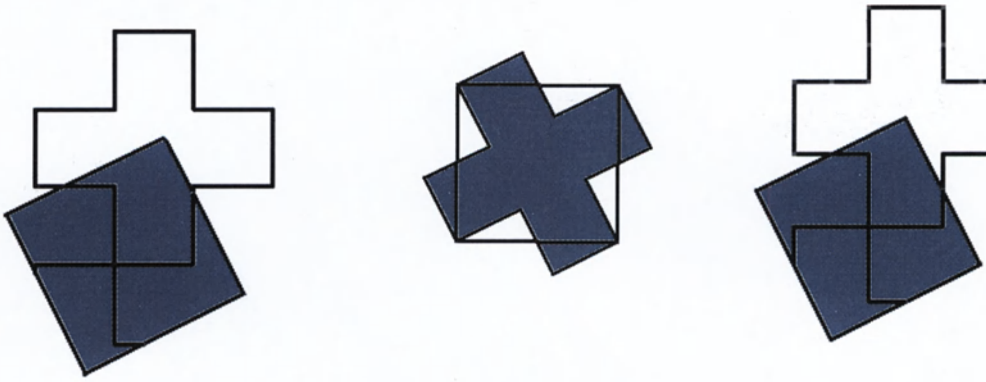
Puzles de la cruz griega

La posibilidad de hacer un mosaico tomando como baldosa una cruz griega, y el poderlo hacer también con cuadrados equivalentes, nos permite intentar, moviendo el uno sobre el otro, buscar un submosaico común. Lo sorprendente en este caso es que podemos encontrar infinitas soluciones, que sólo exigen

[1] Henry Ernest Dudeney (1857-1930), autor inglés que, junto con el norteamearicano Sam Loyd (1841-1911), es considerado como el mejor creador de problemas de ingenio de todos los tiempos. Dudeney fue autodidacta en su formación matemática, destacando en la creación de puzles. Publicó muchos de sus trabajos en *The Strand Magazine*, revista en la que aparecían las aventuras del famoso detective *Sherlock Holmes*. Estuvo casado con Alice Dudeney, popular escritora de novelas románticas.

traslaciones. Basta con que la cuadrícula equivalente tenga un lado cuyos extremos descansen sobre los dos lados largos de un brazo de la cruz, o que sea paralelo a estos segmentos. (En el dibujo de la izquierda la cruz y el cuadrado quedan divididos en seis piezas congruentes dos a dos).

Buscar un menor número de piezas, formas de moverlas o simetrías, guía nuestra selección de los puzles.

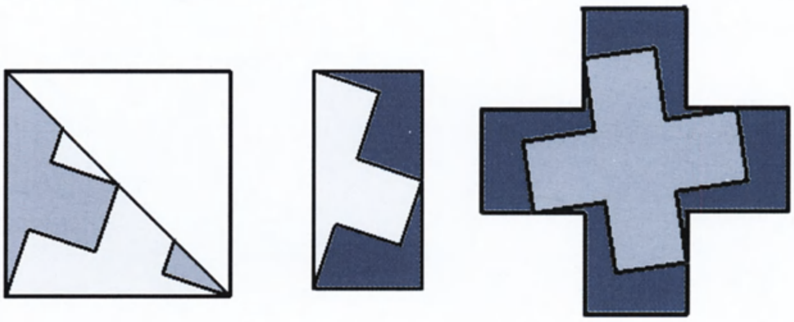


Si un vértice del cuadrado queda situado en el cuadrado central de la cruz, el puzle tiene cuatro piezas. (Puzle de la izquierda).

Si el vértice del cuadrado coincide con el centro de la cruz, las cuatro piezas son iguales y se pueden mover las piezas girando y unidas en algún vértice. (Puzle central).

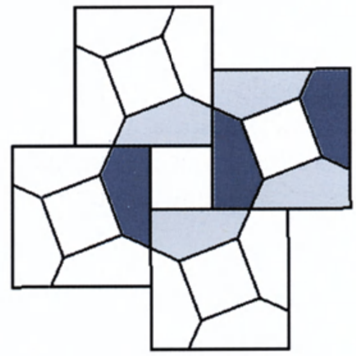
El puzle de la derecha no responde al esquema anterior. Tiene simetría de giro.

Puzles de cruz griega basados en relaciones numéricas asociadas a las áreas

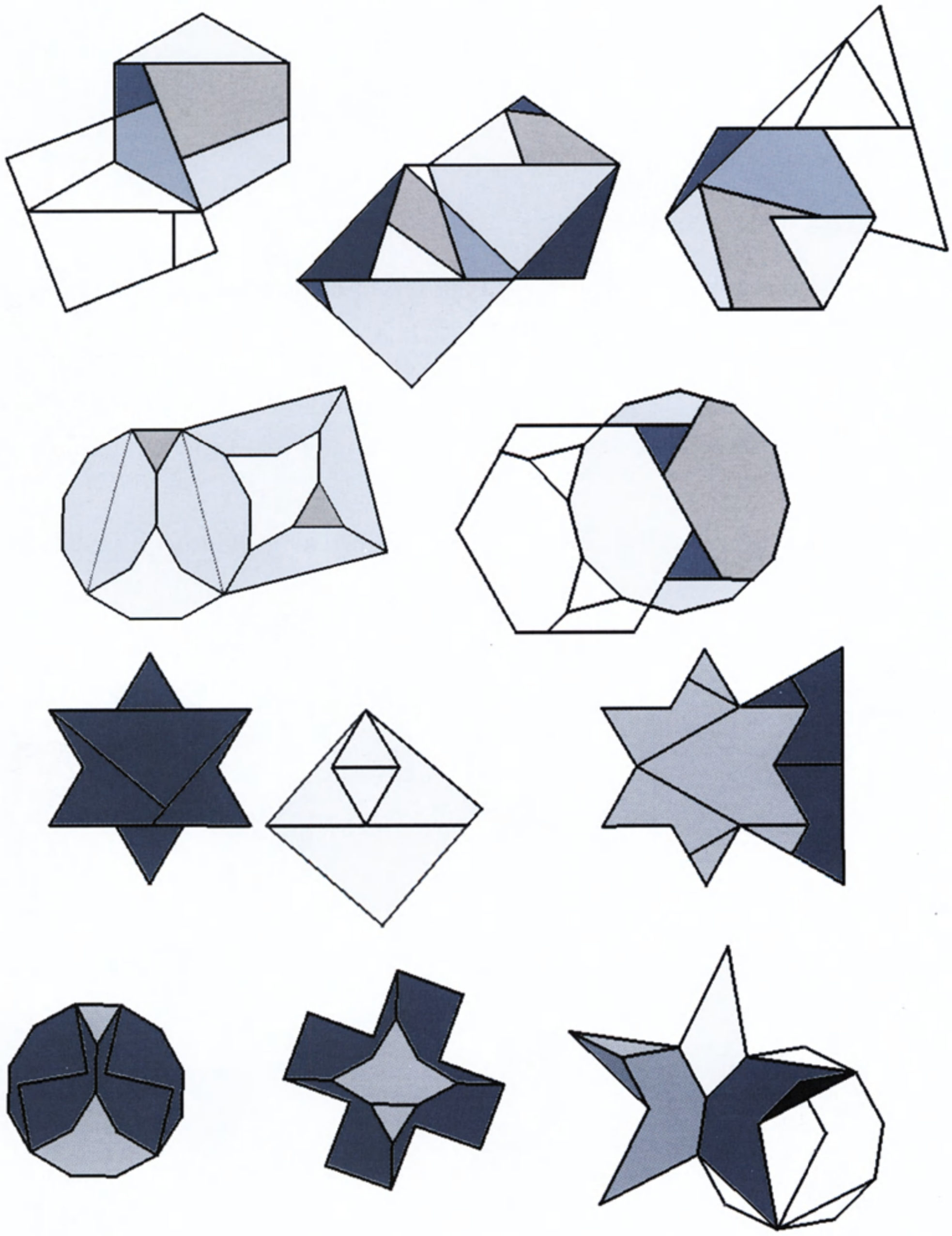


Otro puzle obtenido por superposición de mosaicos

Superponemos el mosaico semirregular de octógonos y cuadrados (488) con el de cuadrados de área, la suma de las áreas de un octógono y un cuadrado de aquellos. Movemos hasta conseguir el submosaico común de la izquierda.



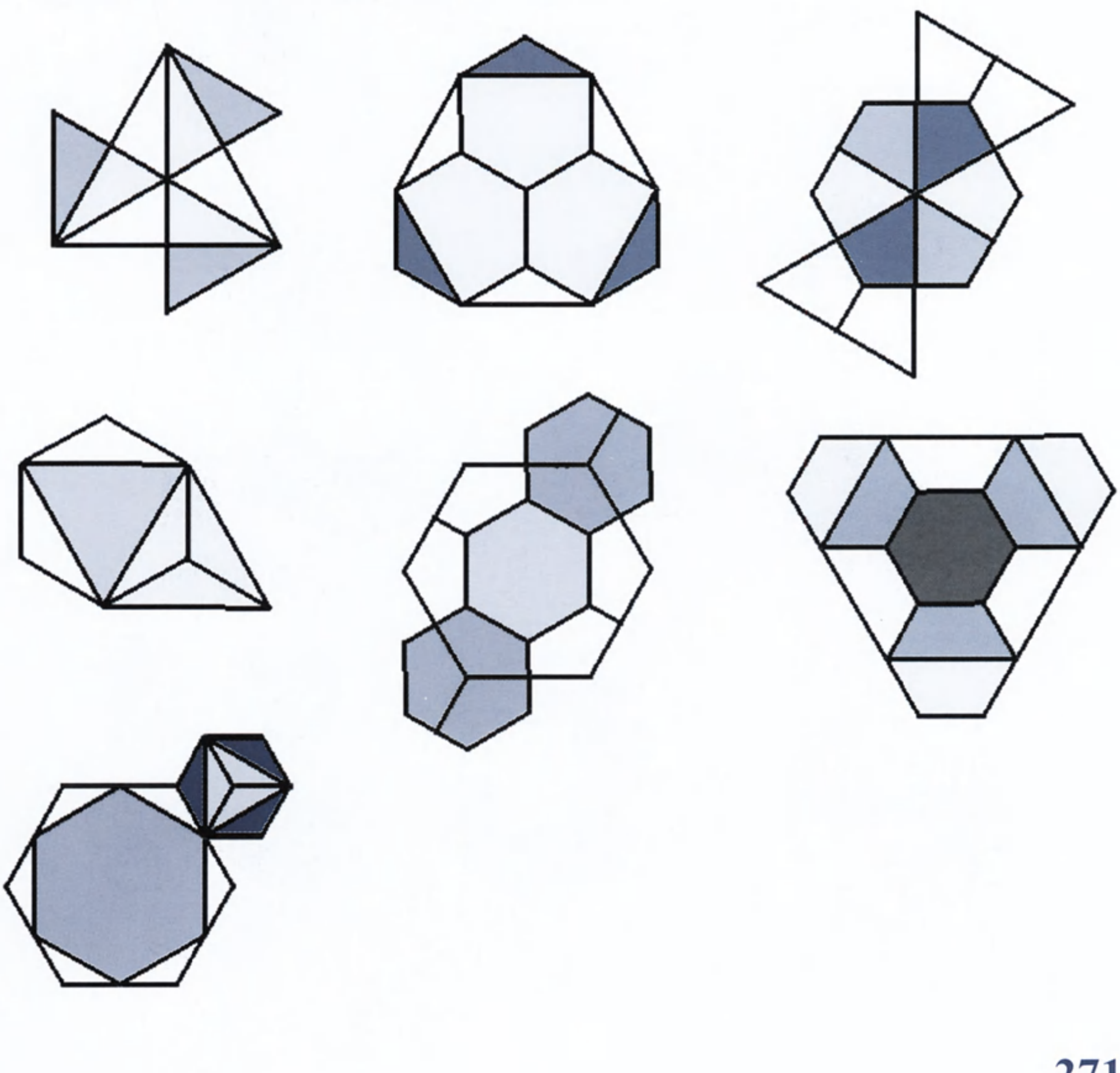
Puzles de transformación entre polígonos regulares



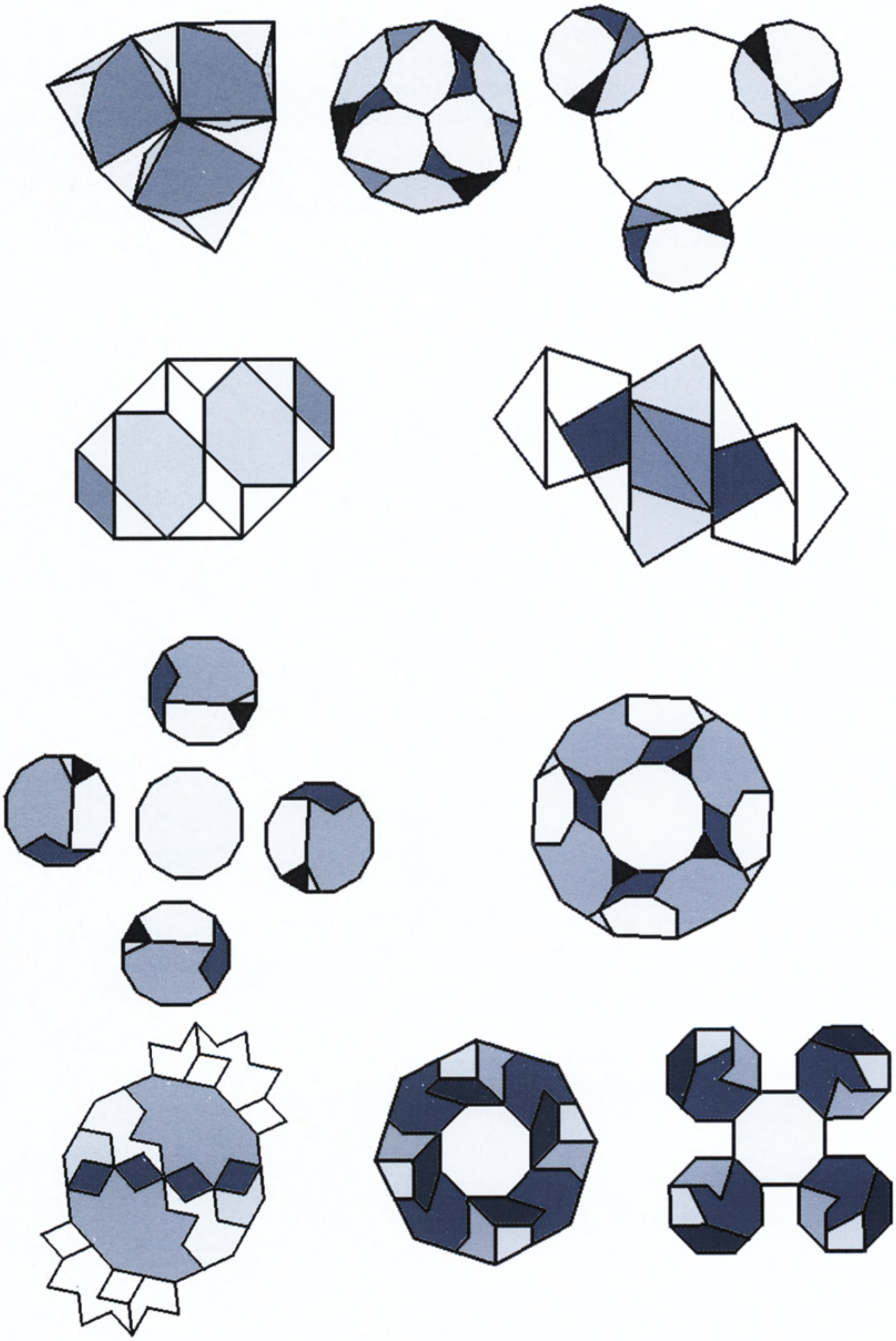
Aunque podemos intentar aplicar los métodos generales (transformar las figuras que hay que relacionar en una intermediaria, superposición de mosaicos...), los puzles mínimos entre polígonos regulares suelen aplicar técnicas más avanzadas, ideas felices y a veces resultados inesperados). En algunos nuestra labor geométrica es, a la vista del puzle resuelto, confeccionar las piezas, lo que no sólo resulta un desafío interesante, sino que es además un buen pasatiempo individual, pero no demasiado aconsejable para un trabajo general en una clase. En los arriba expuestos pueden reconocerse métodos de intermediario en las transformaciones cuadrado-pentágono y cuadrado-hexágono; método de mosaicos en la hexágono-dodecágono; métodos de relaciones especiales sencillas (pero no triviales) en los demás casos, salvo la sorprendentemente difícil (para lo que uno espera) transformación triángulo-hexágono y la cuadrado-hexagrama, donde la aparición de piezas no convexas es ya un aviso de su especificidad.

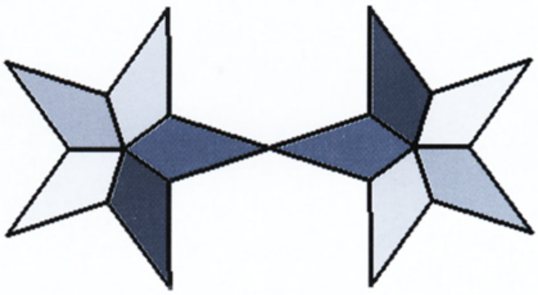
PUZLES DE DISECCIÓN MÚLTIPLE

Ejercicios sencillos con triángulos y hexágonos



Más disecciones múltiples





BIBLIOGRAFÍA

[1] Boltianski, V. G. (1981): *Figuras equivalentes y equicompuestas.* Moscú, Mir, col. Lecturas populares de Matemáticas.

[2] Dudeney, H. E. (1988): *Los acertijos de Canterbury y otros problemas*. Barcelona, Granica.

[3] Dudeney, H. E. (1993): *El acertijo del mandarín y otras diversiones matemáticas.* Madrid, Zugarto.

[4] Gardner, M. (1972): *Nuevos pasatiempos matemáticos.* Madrid, Alianza, col. Libro de bolsillo nº 391.

[5] http://mathworld.wolfram.com/Dissection.html

[6] http://www.cabri.imag.fr/abracadabri/abraJava/Dissection

EL CUENTO COMO RECURSO DIDÁCTICO EN MATEMÁTICAS

Juan Carlos Hervás
IES Europa (Rivas Vaciamadrid)

¿POR QUÉ UTILIZAR CUENTOS EN CLASE DE MATEMÁTICAS?

- Capta la atención del alumno mediante el poder atractivo de la narración, conduciéndole a nuestros objetivos al hilo de la historia narrada.
- Ofrece una imagen de la Matemática menos técnica y más conceptual, a la vez que más humana y racional.
- Intenta que el alumno se aproxime a las Matemáticas de una forma constructiva y desde sus propias capacidades, y no asimilando verdades dogmáticas.
- Aprovecha el poder evocativo del relato para fijar en la mente del estudiante lo nuclear de los temas que se imparten.
- Acerca los caminos que recorre el pensamiento matemático a situaciones de la vida real, que son cercanas y conocidas al joven actual, mediante distintos estilos narrativos.

¿CÓMO UTILIZAR EL CUENTO EN EL AULA?

- Forma: lectura pausada o con apoyos de un montaje audiovisual.
- Momento: antes de comenzar un tema –como introducción de las ideas fundamentales–, al final del tema –como colofón recordatorio y asimilador de los elementos claves– o durante el tema –como aclaración de un concepto difícil de captar–.
- Trabajo: personalmente o en grupos pequeños se realizará la aplicación pedagógica relacionada con el cuento.

UN EJEMPLO: *EL CUENTO DE LAS DERIVADAS E INTEGRALES*

- Enclavado en un tiempo futuro con grandes ordenadores, clonaciones, imágenes virtuales y guerras bacteriológicas, altamente atractivo para el joven de hoy.
- Introduce las funciones como máquinas generadoras, en este caso, de elementos orgánicos.
- Se centra en la derivación y la integración como transformaciones que sufre la función.
- La clave del cuento se fundamenta en el carácter recíproco de la derivada y de la integral, y cómo ésta última recupera a la función inicial.
- Utiliza la invariabilidad de la exponencial con respecto a la derivación.
- Plasma de una forma clara la cierta facilidad de la derivación y, sin embargo, la dificultad, y a veces imposibilidad, para integrar.
- Se puede utilizar en 1º de Bachillerato antes de introducir el cálculo diferencial e integral como aproximación de las ideas, en el momento de hablar de integral como transformación recíproca de la derivación o al final del tema como asentamiento y repaso.

EL RELATO: *CUENTO DE LAS DERIVADAS E INTEGRALES*

Estación virtual Gamma, año 2099.

Desde que mi abuelo me regaló en mi quince cumpleaños un obsoleto DVD de primera generación, de imágenes de la antigua Tierra, no hacía otra cosa que pasar las horas muertas sentado en el aula de proyección y observando maravillado el colorido de aquel mundo tan distinto al mío. Me encantaba visionarlo con él a mi lado porque me iba narrando cómo sucedió todo. Su memoria, que dudaba al intentar recordar lo sucedido el día anterior, accedía con nitidez al primer periplo de su vida rescatando la crónica detallada de lo acaecido. Contaba cómo el ser humano no supo frenar el deterioro ambiental, y la tan anhelada *sociedad del bienestar* se le fue de las manos y resultó insostenible mantener tan trepidante ritmo de consumo. El aire se envenenó, el suelo se secó y las últimas sacudidas de un planeta que expiraba, sembraban los campos y las calles de muertos.

Paradójicamente, los científicos lograban la culminación de muchos de los sueños que animaron desde siempre a los fieles seguidores de la razón y del pensamiento. De la clonación humana se llegó a la clonación informática y con ella se retaba a la muerte. Potentísimos ordenadores transformaban los componentes biológicos de un ser humano en complejas funciones matemáticas que manejaban a su gusto sus chips inteligentes, consiguiendo una vida virtual similar a la de la persona en cuestión. Las simulaciones de vidas alcanzaron tal perfección que resultaba imposible distinguir si hablábamos con un individuo o con su imagen virtual. Sin embargo, las diferencias existían y marcaban la clara división entre lo vital y lo artificial. Las copias obtenidas por las computadoras tenían vida propia, incluso llevaban incorporados mecanismos de crecimiento que conseguían recrear la evolución de la persona con el tiempo, aunque alcanzando los cincuenta años se entraba en un bucle que lo devolvía a los veinte, conservando en memoria toda la experiencia obtenida con la edad. Por supuesto, al carecer de elementos orgánicos, no necesitaba nutrirse para sobrevivir, tan sólo precisaba energía suministrada por grandes baterías.

Un programa de procreación, que mezclaba aleatoriamente dos patrones de seres que ya estaban configurados en el disco duro, generaba hijos virtuales de gran parecido a sus congéneres.

Se vivían momentos de gran tensión mundial, y la amenaza de la guerra bacteriológica ondeaba en la enrarecida atmósfera del globo. En este marco de inestabilidad, un experimento de emergencia se realizaba en la NASA. SAM, el ordenador que salvaguardaba la seguridad de los EEUU, diseñaba bajo las órdenes de los más expertos técnicos un planeta virtual en el que habitaban unas 100.000 personas, imágenes calcadas de otras tantas de lo más variable y selecto de toda la geografía terráquea. Vivirán a su vez en un espacio virtual creado para la ocasión, posibilitando cualquier necesidad que pudiera surgir. Este microplaneta estaría enclavado en algún lugar de la vasta extensión del estado de Virginia, pero permanecerían aislados de lo real por una capa que impedía la travesía de un mundo a otro.

Cuando recuerda cómo la bomba acabó con todo, a mi abuelo se le llenan los ojos de lágrimas. La gente desplomándose sin vida por las calles como cuerpos inertes. Casi no fue consciente de su propia muerte, tan solo albergaba la esperanza de que, al ser seleccionado, resucitaría a la masacre, aunque de otra forma.

Mi abuelo tiene más suerte que yo, a él al menos le queda la memoria. Yo nací en las entrañas de una CPU, y mis recuerdos no van más allá de este planeta absurdo donde nada es real.

Nunca nadie me lo dijo, pero yo lo intuía. Algo se dejaba entrever cuando se tocaba el tema. El ambiente se tornaba ambiguo y se notaba la clara intención de ocultar algo. Apostaría lo que fuera que era posible traspasar la frontera con la realidad que ocupaba la capa *infranqueable.* Esa idea me obsesionaba y la tentación de atravesar me perseguía.

En el Instituto, en las clases de Matemáticas, estudiamos el mecanismo de la *capa.* Al parecer, transforma la propia esencia del que la franquea, derivando todas las componentes funcionales que le configuran, incluso los de la memoria, produciendo un efecto *alzeimer,* consiguiendo no sólo que seas otra persona sino que olvides quién eras. De alguna forma no desapareces ni eres destruido, sino que cambias totalmente de identidad.

Mediante un escáner corporal se podían contemplar en pantalla las funciones que integran cada una de las partes de tu organismo y que generan una vida aparente. Observaba mi imagen interna y veía cómo una maraña de polinomios constituían mi cabeza, una serie de funciones trigonométricas daban forma al tórax y al abdomen y complicadas logarítmicas y exponenciales me permitían manejar mis extremidades.

Las reglas de derivación parecían sencillas y rápidamente aprendí a derivar complicadas funciones, incluso pude imaginar mi aspecto al sobrepasar la *capa,* aunque los ordenadores no autorizaban la génesis de imágenes virtuales, por lo que podía conocer mi aspecto en el mundo real pero nunca intuir mis reacciones ni mi personalidad.

Aún así, ¿dónde estaba el peligro? La *capa* se podía cruzar y sus efectos no eran destructivos sino, al contrario, transformadores, y a nadie viene mal un cambio de imagen.

"El problema radica en la marcha atrás del proceso", contestó mi abuelo al formularle mis dudas. "La *capa* está preparada para realizar automáticamente la salida pero no el retorno. Una vez en el mundo real, el regreso es manual y tan solo si recuerdas todas tus componentes funcionales originales la *capa* permite tu vuelta. Pero, debido al efecto *alzeimer*, la memoria olvida sus antiguos registros y sólo un profundo conocimiento de la integración podría ayudarte en esa situación". Mi abuelo se llevó la mano a la boca como intentando atrapar la palabra que no hubiera querido pronunciar.

"¿Integración, abuelo? ¿En qué consiste?"

"Intenta olvidar, por tu bien, lo que voy a contarte".

Con la voz temblorosa me iba informando que la integración es el proceso inverso de la derivación, al igual que la multiplicación lo es de la división o la potencia de la raíz. "Consigue recuperar la función que anteriormente se derivó. Como ves, es la llave que permite el camino de retorno por la *capa* y por eso se destruyeron todos los documentos editados al respecto después de lo de Conrad".

"¿Conrad?", pregunté manifiestamente interesado.

"El joven Conrad era un muchacho tan inquieto como tú, que se dedicó durante varios años al estudio de algún método que permitiera *volver a integrar lo desintegrado por la capa*. Además, buscaba afanosamente funciones de su cuerpo que permanecieran invariables al traspasar la frontera, para transcribir en su interior todos sus conocimientos sobre la integración y que no se desvanecieran por el efecto *alzeimer*. Cuando descubrió las propiedades de la exponencial, nadie le pudo frenar en su empeño y cruzó".

"¿Qué fue de él?", me interesé extrañado.

"Algo debió salir mal o decidió establecerse en el mundo real, pero lo cierto es que nada más se supo".

Esa noche no pegué ojo, la novedad de todo lo descubierto me mantuvo en vela y ardía en deseos de saber qué le sucedió a Conrad. A la mañana siguiente las dudas y el miedo desaparecieron de mi semblante y una única determinación se inscribía en mi cerebro, a la vez que el nombre de Conrad se ocultaba tras la exponencial ubicada en algún sitio de mi memoria. Con el subidón de adrenalina y con gran confianza en el corazón, cerré los ojos y atravesé sin pensarlo.

Nadie puede saber las sensaciones de un bebé en el momento del parto, pero debe ser algo parecido a lo que sentí cuando *nací* al mundo real: una persona sin conciencia de quién era y una sola palabra en el cerebro, Conrad.

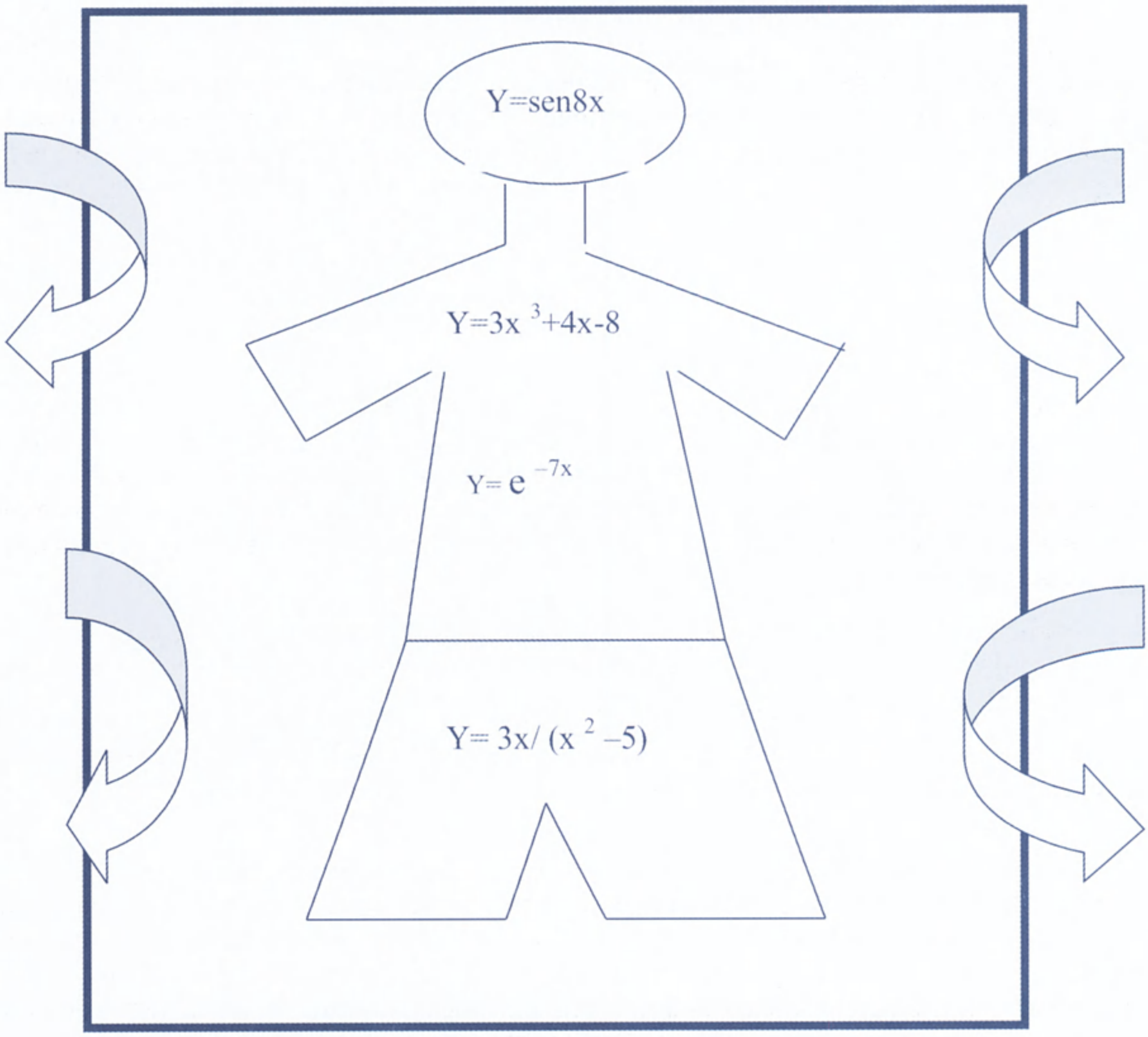
Si en algún momento pensé que estaría solo, hubiera errado estrepitosamente, ya que la gente iba y venía en un territorio que resurgía de los efectos de la guerra y permitía que la vida renaciese de lo estéril.

Conrad era una verdadera institución en este mundo naciente. Gracias a él, todos tenían el billete de vuelta asegurado, aunque la mayoría retardaba el regreso disfrutando de experiencias para ellos desconocidas. La profunda alegría de ayudar a otros se mezclaba con la melancolía de saber que para él era imposible volver. Un antebrazo complejo formado, entre otras funciones, por varias e^{-x^2}, tenía la culpa. Ninguno de sus métodos de integración conseguían recuperar la función de la cual provenía.

Trabamos una gran amistad y en tan sólo una hora integró todo mi cuerpo por partes y de una forma *inmediata.* Esa noche bebimos más de la cuenta y añoramos nuestro mundo virtual frente a la *capa* que se extendía ante nuestros ojos. En un arrebato tomé un hacha que se encontraba extraviada en el suelo y, en un despiste de mi amigo, le seccioné el brazo *no integrable.* Casi desmayado, le arrastré al borde de la frontera y pudimos cruzar sin problemas. Después de todo, cada uno pertenece al lugar de donde es y siempre es preferible que un amigo se encuentre cerca de uno aunque sea lisiado; en cualquier caso siempre existía una amplia gama de brazos a escoger en catálogos virtuales.

APLICACIÓN PEDAGÓGICA DEL CUENTO

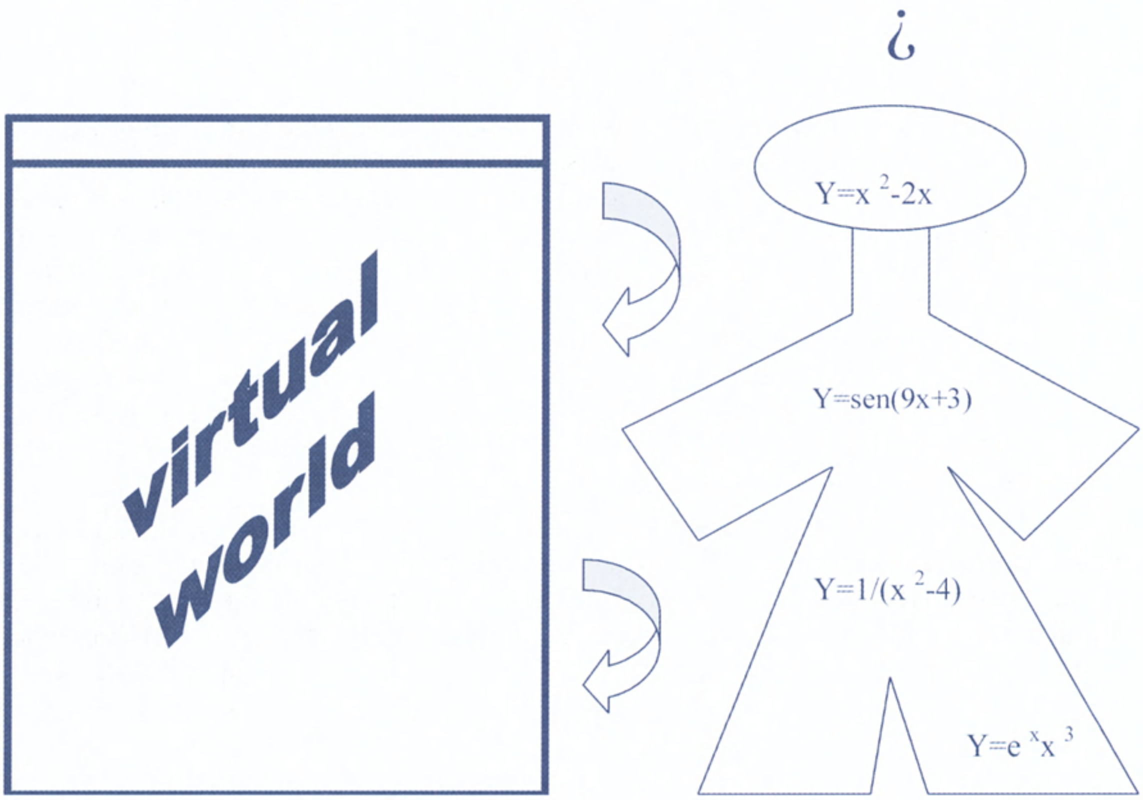
1) ¿Cómo cambiarían las funciones corporales de la persona que está en el mundo virtual al atravesar la *capa* y salir al mundo real?



2) Interrogatorio breve:

- ¿Qué mágica propiedad tiene la exponencial, mediante la cual se puede guardar información dentro de ella y no variarse ni perderse al entrar o salir de la *capa*?
- ¿Por qué Conrad no podía regresar al mundo virtual?
- ¿A qué aluden las expresiones *por partes* e *inmediatas*?
- Señala todos los métodos de integración que conozcas.
- ¿En qué sentido la derivación e integración son mecanismos inversos? Explícalo con tus palabras o con algún ejemplo.

3) Un individuo quiere volver al mundo virtual pero Conrad ha desaparecido y desconoce cómo debe transformar sus funciones para que la *capa* le permita la entrada. Ayúdale a atravesar la frontera cambiando todas sus funciones.



LA PROGRAMACIÓN LINEAL CON LA HOJA DE CÁLCULO EXCEL: UNA APUESTA POR LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

Juan José Prieto Martínez
IES Pedro de Tolosa, San Martín de Valdeiglesias

INTRODUCCIÓN

Cada vez más, las Matemáticas se tratan como herramienta de trabajo en la vida cotidiana y con aplicaciones en problemas reales. Los docentes debemos intentar, en todos los niveles de la Educación Secundaria, que los alumnos comprendan que las Matemáticas surgen y son aplicadas en la vida real; de esta forma, quizás, podamos tener un elemento motivador del aprendizaje de los conceptos y procedimientos fijados en la programación inicial de curso. Nosotros, los profesores, tenemos la obligación de enseñar a nuestros alumnos aspectos de actualidad o problemas que tuvo la humanidad y que fueron resueltos justamente mediante conceptos y procedimientos que corresponden con el tema que se imparte en clase. Que comprendan que lo explicado y estudiado en el aula es herramienta fundamental de trabajo para el día de mañana. Posiblemente, la actitud de algunos de nuestros docentes cambie.

La *Programación Lineal* es una técnica de modelado matemático, diseñada para optimizar el empleo de recursos limitados. La Programación Lineal se aplica con gran éxito en campos como el ejército, la agricultura, la industria, la economía, las ciencias sociales, etc. La utilidad de la técnica es mayor a medida que las tecnologías han ido progresando y desarrollándose. De hecho, la Programación Lineal, debido a su enorme nivel de eficiencia computacional, es la base para el desarrollo de algoritmos de solución de otros tipos de modelos del área de la investigación operativa. Los cálculos son voluminosos y tediosos y, por consiguiente, requieren el empleo de los ordenadores. Los programas como el WinQSB, SPSS, STATGRAPHICS o SOLVER de la hoja de Cálculo Excel, están diseñados para mitigar la carga de los cálculos. No está de más enseñar a nuestros alumnos la existencia de estos programas y su utilización por parte de grandes empresas como herramienta de trabajo.

La práctica de resolución de un problema de Programación Lineal, en un aula de informática de cualquier Instituto de Educación Secundaria, tiene como objetivos fundamentales:

- Comprobar si los alumnos recuerdan el concepto y el procedimiento de resolución de inecuaciones aprendido en 4º de ESO.

- Desarrollar procedimientos: búsqueda de inecuaciones equivalentes a una dada; interpretación gráfica en un sistema de coordenadas; aplicación de distintas técnicas y estrategias para resolver problemas de Programación Lineal.
- Desarrollar actitudes: reconocimiento y valoración crítica de los programas de ordenadores en la resolución de problemas de Programación Lineal; interés y curiosidad por la resolución de los citados problemas; confianza en las propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones a problemas susceptibles de ser resueltos.
- Hacer hincapié en el concepto de valor de una función.
- Usar la hoja de cálculo como herramienta en el desarrollo matemático y esencial hoy en día en el mundo laboral.
- Comprender el concepto de solución factible y solución óptima en un problema de Programación Lineal. Saber dibujar la región factible asociada.
- Fijar el concepto de "problema de Programación Lineal": maximizar o minimizar una función de dos variables (en este curso) restringida a un conjunto de inecuaciones también de dos variables.

PROGRAMACIÓN LINEAL CON EXCEL

Consideremos el siguiente problema (Prueba de Selectividad en Andalucía, 2000):

> La región factible de un problema de Programación Lineal es la intersección del primer cuadrante con los tres semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:
>
> $$(x / 10) + (y / 8) \leq 1; \quad (x / 5) + (y / 8) \geq 1; \quad (x / 10) + (y / 4) \geq 1.$$
>
> Calcula el mínimo de la función objetivo, $F(x,y) = 4x + 5y$, en el recinto anterior.

El citado problema puede formularse en una hoja de cálculo Excel. En la tabla adjunta se muestra el modelo planteado asociado a dicho problema.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Variable X	Variable Y				
2	Valores óptimos de las variables	1	1				
3							Valor de F
4	Función Objetivo	4	5				B2*B4+C2*C4
5							
6	Restricciones						
7	Primera	1/10	1/5		B2*B7+C2*C7	≤	1
8	Segunda	1/8	1/8		B2*B8+C2*C8	≥	1
9	Tercera	1/10	1/4		B2*B9+C2*C9	≥	1

Se contempla en la tabla que:

1) Los valores factibles (valores posibles de las variables que verifican todas las restricciones) u óptimos de X e Y están en las celdas B2 y C2, respectivamente. (Inicialmente toman el valor 1 para que pueda realizarse operaciones posteriores).
2) Los coeficientes de la función objetivo están en las celdas B4 y C4 y el valor de la función objetivo se encuentra en la celda G4.
3) Los coeficientes de las variables X e Y pertenecientes al conjunto de restricciones se hallan en las celdas B7, B8 y B9 para la variable X, y C7, C8 y C9 para la variable Y.

El alumno debe revisar la hoja de cálculo propuesta por tres motivos esenciales:

a) Para una mayor comprensión del problema de Programación Lineal.
b) Para comprobar la existencia de errores en la modelización. Éstos pueden llevar a conclusiones erróneas. Nótese que los procedimientos de corrección y precisión son siempre procedimientos que deben ser evaluados personalmente como positivos.
c) Para aprender a generalizar el procedimiento a otros contextos.

El primer paso para resolver el problema de Programación Lineal mediante la hoja de cálculo Excel es introducirse en el programa *Solver.* Éste se encuentra en el menú de herramientas dentro de la opción *Complementos.* En la pantalla aparecerá una caja (*Solver Parameter*) en la cual debe introducirse la siguiente información:

1) Celdilla donde se debe indicar el valor óptimo de la función objetivo. Dicha información debe registrarse en *Set Target Cell* (celda F4). Se escribirá o simplemente haciendo clic en la celda correspondiente.
2) Elegir si el problema trata de maximizar o minimizar una función.
3) Elección de las celdas donde se escribirá los valores óptimos de las variables. La citada información se registrará en *By Changing Cells* (B1 y C1).
4) Se deben agregar las restricciones. Para ello existe un recuadro en blanco junto a tres celdillas de elección en paralelo: *Add..., Change, Delete*. Eligiendo la primera, *Add Contraint* (Añadir Restricciones) aparecerá una sub-caja donde se escribe la información de cada una de las restricciones en los siguientes campos:

   Cell Reference: valor total utilizado por las variables en cada restricción. Debe cumplirse por tanto la restricción de desigualdad (celdas E7, E8 y E9).

   Contraint: elección del signo de la desigualdad (≤, ≥ y ≥).

   "Celda en Blanco": valor del término independiente (F7, F8 y F9).

Incorporada la información necesaria se debe hacer clic en *OK* de la citada sub-caja para que aparezca de nuevo la caja inicial de *Solver Parameter*, mostrando la configuración completa del problema modelizado. Es ahora imprescindible indicar al programa que se trata justamente de un problema de Programación Lineal. Para ello elegimos la opción

Option y posteriormente la opción *Asume Linear Model*. Haciendo clic una vez más en *OK* se vuelve de retorno a la caja inicial de *Solver Parameter*, estando listo el programa para resolver el problema.

Después que el programa ha realizado una serie de cálculos debe aparecer en pantalla una caja indicando los resultados del programa *Solver* (*Solver Results*). De esta forma se indica que el programa ha resuelto el problema encontrando una solución. Para que la transferencia de los resultados del programa *Solver* a la hoja de cálculo pueda ser una realidad, hay que verificar la opción de mantener la solución del programa (*Keep the Solver Solution*).

PRÁCTICA CON ORDENADOR: UNA MOTIVACIÓN PARA EL APRENDIZAJE

Se ha pretendido evaluar el grado de motivación y autoestima de dos grupos (de 20 y 23 alumnos) de 2º de Bachillerato al aprender Programación Lineal con la ayuda de las Nuevas Tecnologías (serán denominados a partir de ahora *grupo B*), frente a otros dos grupos (de 19 y 23 alumnos) del mismo curso (denominados a partir de ahora como *grupo A*), y perteneciente a otro Instituto de la misma localidad, que aprenden el citado tema con materiales didácticos tradicionales (libro, pizarra, etc.). La dedicación docente teórica-práctica por parte de los profesores de cada grupo se fijó en ocho horas para el grupo A y ocho + tres horas para el grupo B, estas últimas tres horas en dedicación exclusiva para explicarles cómo tratar la hoja de cálculo Excel en Programación Lineal. Es importante notar que este último grupo tiene conocimientos de Informática, estudiados al menos en una asignatura optativa en la ESO y otra en Bachillerato. A continuación se les planteó a los alumnos que resolvieran dos problemas de Programación Lineal individualmente en forma de examen, los cuales se presentan al final de este trabajo como Anexo, en uno de ellos se muestra la solución.

El grupo que no utilizó las nuevas tecnologías, resolvió el ejercicio de manera individual en hojas de examen. El grupo B dispuso de una sala de ordenadores, uno por cada alumno. El problema pudieron resolverlo computacionalmente con la citada hoja de cálculo y manualmente. El tiempo de examen fue para estos alumnos de 65 minutos, mientras que para el otro grupo fue de 50. El motivo de que el grupo B dispusiera de 10 minutos más fue porque los alumnos tenían la posibilidad de entregar, además del examen escrito, explicaciones referentes a los ejercicios resueltos por ordenador en el mismo papel de impresión. Los alumnos que entregaron el ejercicio en estas condiciones eran evaluados satisfactoriamente, siendo muy importante de cara a la clasificación final del curso y la puesta a punto de la Selectividad. Los resultados generales por parte de ambos grupos vienen reflejados en la Figura 1.

Se contempla que el grupo A obtuvo significativamente peores resultados que en el grupo B. La media (marcada con +) en el grupo A fue de 4,46 frente a 5,35 del grupo B. La otra medida de posición central (la mediana, representada por el segmento que divide a la caja) corrobora el significado de la media aritmética, dando un peso relevante en la docencia con las Nuevas Tecnologías. Obsérvese que la mediana en el primer caso está en torno al 4,4, frente al segundo caso que se encuentra próxima al 5,3. Nótese que las desviaciones típica fueron similares en ambos grupos (1,13 y 1,11, respectivamente). Es significativo indicar que el porcentaje de calificaciones suspensas es más alto en el grupo A. Por el contrario, en el grupo B un 50% de alumnos obtuvo una calificación superior a la mediana. En cambio, esto no puede asegurarse para el grupo A. De hecho, aproximadamente un 65% del grupo suspendió. Es también interesante recalcar que las mejores calificaciones también fueron obtenidas para el grupo B; el 25% obtuvo una calificación superior o igual al 6, justamente es en torno a esta calificación la máxima obtenida en el grupo A. Por último, debemos notar la poca o ninguna existencia de notables y sobresaliente por parte de ambos grupos.

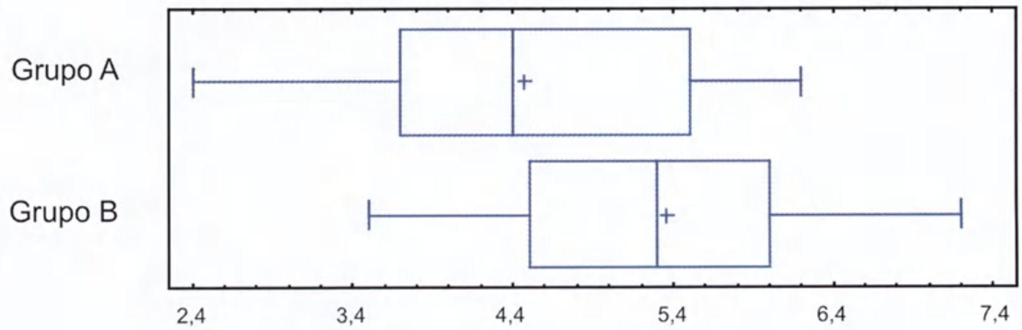


Figura 1. *Resumen de las calificaciones en los grupos A y B*

No solamente se pueden evaluar conceptos y procedimientos en una práctica de estas características, sino también hechos. La evaluación del dominio adquirido adopta dos formas básicas: recordando mediante la enumeración y la selección en la tabla Excel que se dispone en una matriz, e identificando y reconociendo qué tipo de función y qué conjunto de restricciones se está tratando. "Identificar la información global y la específica de textos escritos auténticos sobre problemas reales" es ejemplo esencial de evaluación destinado a valorar el dominio de ciertos hechos. La evaluación de hechos es, sin lugar a dudas, una de las prácticas más frecuentes en la actualidad, y probablemente será la que menos problemas plantee en el futuro. Sin embargo, es bueno tener en cuenta algo que puede tener gran importancia: no es lo mismo saber que recordar, y se recuerda la información en el mismo sentido en que ha sido enseñada. Por consiguiente, el aula de informática, el ordenador, la nueva disposición para el aprendizaje, puede ser esencial para captar nuevos conceptos poco motivadores de aprendizaje para nuestros alumnos.

La criterios de evaluación de conceptos son de distintos tipos: definiciones, comparaciones de ejemplos, aplicaciones de resolución de problemas, reconocimiento de ideas en la realidad, etc. Pero sería de desear en todos los casos que esas actividades fuesen las mismas que los alumnos y alumnas realizan para lograr el aprendizaje de los mismos conceptos. De ahí la gran importancia que supone las nuevas herramientas de aprendizaje: las Nuevas Tecnologías.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Prácticas como éstas tiene un cierto sentido curricular. El alumno ha de elaborar su respuesta: la tarea implica organizar los conocimientos que se poseen y expresarlos. Da pie a un estilo personal de respuesta.

Permite comprobar directamente la calidad y características de la repuesta e indirectamente el tipo de operaciones y habilidades implicadas en su elaboración: no sólo qué responde sino cómo ha dado la respuesta y en qué actitud de trabajo individual o colectivo. Aspectos como posesión de vocabulario adecuado en los informes elaborados en el papel de impresión, capacidad para organizar la información, originalidad, creatividad, etc., pueden ser evaluados a través de esta técnica en la modalidad de visitar el laboratorio de Informática. El manejo de los instrumentos informáticos, la organización del proceso de elaboración, el estilo personal, etc., son todos aspectos detectables a través de los ejercicios prácticos con ordenador. Además, estas prácticas cumplen el doble papel de control de conocimientos y habilidades de los alumnos, por un lado, y de información adicional sobre el ritmo de aprendizaje y sus incidencias (conceptos no comprendidos o mal asimilados, lagunas comunes y/o individuales, etc.). Abren la posibilidad de un posterior diálogo en clase sobre la plausibilidad y corrección de cada una de las alternativas: por qué es correcta la correcta e incorrectas las que lo son. Es importante, además, utilizar los propios errores como material de trabajo (saber en qué ideas equivocadas se apoyan, qué matices les faltan o sobran para ser correctos, etc.).

ANEXO

Ejercicio 1. *Se dispone de 13.000 euros para invertir en acciones de tipo A y B. Las del tipo A tienen un beneficio del 9% y las del tipo B del 7%. Se decide invertir un máximo de 7.000 euros en las de tipo A y como mínimo 1.000 euros en las de tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que la inversión en B. Se desea saber cómo se debe invertir en las citadas inversiones para obtener el máximo interés.*

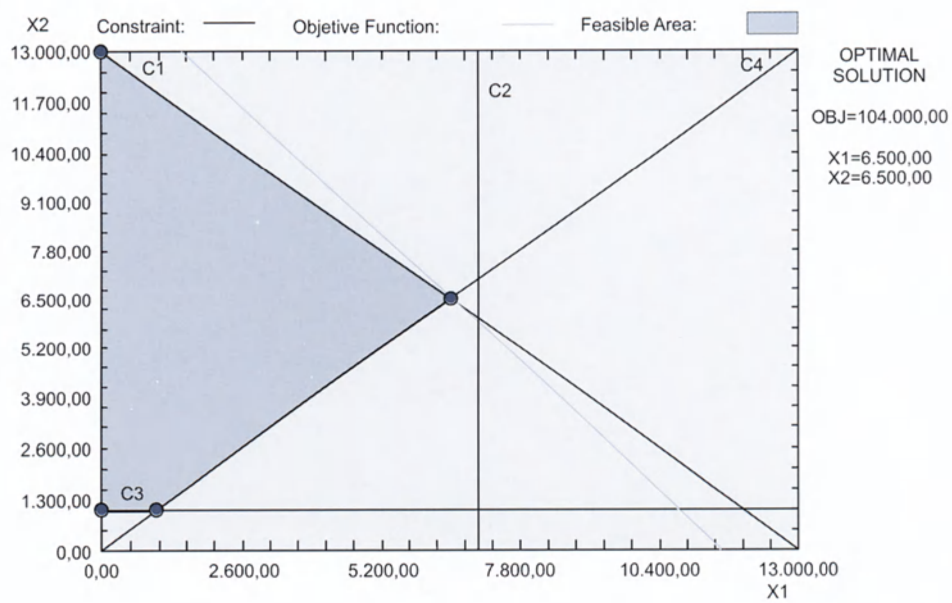
Solución. Sean x e y las cantidades de euros que invertimos en las acciones de tipo A y de tipo B, respectivamente. De la información del problema se deduce que las restricciones impuestas son:

$$x + y \leq 13.000; \quad x \leq 7.000; \quad y \geq 1.000; \quad x \leq y; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

La función objetivo que se quiere maximizar es:

$$I\,(x,y) = (9/100)\,x + (7/100)\,y$$

La solución se obtiene, como indica la siguiente gráfica, en el punto $(x,y) = (6.500; 6.500)$, cuyo valor de la función objetivo es 104.000.



Ejercicio 2. *Las necesidades semanales mínimas de una persona con una determinada enfermedad, de unas sustancias químicas A, B y C son 5, 10 y 8 unidades, respectivamente. Una empresa farmacéutica ha realizado dos fármacos que contiene las citadas sustancias en las siguientes cantidades (en Kg): fármaco A: 3, 6 y 2; fármaco B: 2, 2 y 4. El coste de producción (euros/Kg) de ambos fármacos es 70 y 60, respectivamente. Si el enfermo pide a la empresa que le haga un preparado semanalmente con los dos fármacos para que contenga las sustancias mínimas requeridas, ¿cuántos kilogramos de cada sustancia debe coger semanalmente el farmacéutico para que el preparado tenga un coste mínimo?*

MÉTODOS ESTADÍSTICOS EN EL CURRÍCULO DE BACHILLERATO CON *EXCEL*

Luis Rodríguez Ogando
IES Manuel de Falla, Coslada

Siempre ha existido una preocupación constante de los profesionales de la enseñanza por ofrecer una formación cada vez mejor, más adecuada a las necesidades de nuestra sociedad actual, cuestión que se refleja en la incidencia que las nuevas tecnologías está teniendo hoy en día en la educación.

Concretamente, en el área de Matemáticas, el ordenador nos puede ayudar a tareas como realizar simulaciones, intuir experimentalmente situaciones diversas y, lo que es más importante, permitir adecuar el ritmo de trabajo de clase a la situación personal de cada alumno de forma más atractiva y menos pesada. Todo ello sin olvidar, claro está, la importancia del propio cálculo mental del alumno.

Centrándonos en el programa utilizado –la hoja de cálculo–, cabe decir que es bastante útil en Matemáticas, ya que nos permite realizar un tratamiento automático de la información, con grandes posibilidades para crear gráficos y compartir información con bases de datos, posibilitando desarrollar actividades de forma interdisciplinar con otras materias, como Ciencias Sociales. De ahí su importancia en el estudio de la Estadística.

OBJETIVOS GENERALES

En la programación de las actividades de Estadística con Excel se contemplan como principales objetivos:

- Ayudar a mejorar la práctica docente, apoyando la renovación y la innovación en la forma de hacer Matemáticas.
- Elaborar material curricular de Estadística para el trabajo de clase.
- Promover un aprendizaje más activo por parte del alumno, favoreciendo la experimentación y el planteamiento de conjeturas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Organizar la información en tablas estadísticas para estudio de propiedades de la distribución de datos.
- Simular procesos aleatorios para comprender el concepto de probabilidad.

- Analizar la relación entre dos variables.
- Estudiar las variables aleatorias discretas en general, mediante su función de probabilidad y de distribución.
- Crear diseños de hojas de cálculo para el cálculo de probabilidades, obtener las gráficas y tablas de las distribuciones binomial y normal.

MATERIAL ELABORADO

El material elaborado ha consistido fundamentalmente en la creación de *libros* de Excel que sirvan como plantillas para la realización de problemas de Estadística descriptiva, variables bidimensionales, idea intuitiva de la probabilidad, variables aleatorias discretas en general y de las distribuciones binomial y normal.

Como comentario señalaremos que la presentación de datos con la hoja de cálculo se puede hacer de forma bastante similar a lo que haríamos con lápiz y papel, pero con la ventaja de plasmarlo con un diseño atractivo añadiendo colorido, es decir, haciéndolo más ameno para el alumno.

DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL

Tablas estadísticas

Realización de recuento de datos mediante las fórmulas de Excel *CONTAR.SI* y *FRECUENCIA* en tablas de frecuencia, tanto de datos aislados como agrupados, realizando gráficos para su interpretación y que además servirán para ayudarnos a determinar los parámetros de las distribuciones de datos.

Estadística descriptiva bidimensional

A partir de los datos bidimensionales se hace el recuento de los valores de cada variable por separado en las plantillas de la hoja de cálculo, y luego se estudia la relación entre ambas variables mediante el diagrama de dispersión y la correlación y la regresión lineal.

Idea intuitiva de probabilidad

Se realizan simulaciones de experimentos aleatorios para comprobar cómo la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un valor cuando se realiza un número elevado de pruebas. Dicho valor es la probabilidad del suceso.

Precisamente en este punto la hoja de cálculo nos es de gran ventaja, ya que nos permite realizar simulaciones de miles de pruebas, cuestión que ayuda mucho al profesor al comprobarse experimentalmente dicha estabilización de la frecuencia relativa.

Función de probabilidad y de distribución

Se han realizado tablas de distribuciones de probabilidad y de distribución para el estudio de variables aleatorias discreta, obteniendo sus gráficos y parámetros.

Distribuciones de probabilidad binomial y normal

Se han diseñado modelos de libros de Excel para calcular probabilidades, representar las gráficas y generar las tablas de las distribuciones binomial y normal.

ORGANIZACIÓN

La experiencia se ha llevado a cabo con alumnos de 1º de Bachillerato en la materia de Tecnología de la Información durante el último trimestre de clase del curso 2000/01, realizándose aproximadamente 18 sesiones en un aula de Informática.

MATERIALES

1. Estadística

La Estadística es la ciencia que proporciona métodos para el tratamiento de la información que abarcan varias fases: recogida de datos, elaboración de tablas y la correspondiente interpretación con las representaciones gráficas y el cálculo de parámetros estadísticos.

Para hacer tal estudio nos basamos en alguna cualidad observable de la población, que denominaremos carácter, y que puede ser cualitativo (no se puede medir) y cuantitativo (se puede medir).

Frecuencias absolutas (f_i): número de veces que se repite cada valor.

Frecuencias relativas (h_i): es el cociente f_i/N, siendo N el total de datos.

Frecuencias absolutas acumuladas de un valor x_i (F_i): es la suma de frecuencias absolutas de los valores anteriores al x_i

Frecuencias relativas acumuladas de un valor x_i (H_i): es la suma de frecuencias relativas de los valores anteriores al x_i

Tablas estadísticas

Para analizar la información se elaboran tablas estadísticas que suelen contener las frecuencias absolutas y relativas.

Ejemplo:

Las puntuaciones obtenidas en una prueba objetiva realizada por un grupo de 35 alumnos, en la que se asigna un punto a cada uno de los 10 items que la componen, se muestran en la siguiente hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Puntuaciones obtenidas en la prueba objetiva**						
2	3	4	6	8	7	4	5
3	2	6	5	3	1	0	9
4	3	4	2	7	3	2	6
5	10	7	6	2	5	9	1
6	0	3	8	4	1	8	3

Hoja1 / Hoja2 / Hoja3

La imagen siguiente muestra la tabla con las frecuencias absolutas, las relativas y las frecuencias acumuladas.

	A	B	C	D	E
7					
8		Frecuencias		Frecuencias acumuladas	
9	Puntuaciones	Absolutas	Relativas	Absolutas	Relativas
10	x_i	f_i	h_i	Fi	Hi
11	0	2	0,06	2	0,06
12	1	3	0,09	5	0,14
13	2	4	0,11	9	0,26
14	3	6	0,17	15	0,43
15	4	4	0,11	19	0,54
16	5	3	0,09	22	0,63
17	6	4	0,11	26	0,74
18	7	3	0,09	29	0,83
19	8	3	0,09	32	0,91
20	9	2	0,06	34	0,97
21	10	1	0,03	35	1,00
22		35	1		

Hoja1 / Hoja2 / Hoja3

- Para obtener la frecuencia absoluta de la celda B11 (número de veces que se repite el valor 0) podremos introducir la fórmula *=CONTAR.SI($A$2:$G$6;A11)*. Para obtener las demás puedes rellenar hacia abajo en el rango *B11:B21*.
- La frecuencia relativa de la celda *C11* corresponde a la fórmula *=B11/$B$22*. Rellena hacia abajo el rango *C11:C21* para completarlas.
- Calcula la frecuencia absoluta acumulada de la celda *D11* introduciendo la fórmula *=SUMA($B$11:B11)*. Rellena hacia abajo el rango *D11:D21* para obtener las demás.
- Análogamente la frecuencia relativa acumulada de la celda *E11* corresponde a la fórmula *=SUMA($C$11:C11)*. Rellena hacia abajo el rango *E11:E21* para completarlas.

Datos agrupados

Cuando hay un gran número de datos, éstos se agrupan en clases.

Ejemplo:

En la siguiente hoja de cálculo se muestran las estaturas de 100 alumnos de Bachillerato:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Estaturas de 100 alumnos de bachillerato**									
2	168	171	169	184	175	169	171	180	191	174
3	179	168	182	166	167	176	188	165	176	169
4	183	174	187	172	181	175	184	185	163	181
5	184	171	183	184	175	172	193	172	182	174
6	180	173	168	176	169	186	165	186	184	197
7	192	175	190	186	192	180	174	185	176	173
8	173	173	177	185	178	183	184	180	194	186
9	165	170	184	163	174	179	181	173	179	180
10	178	179	168	177	183	190	177	164	173	186
11	192	186	183	178	174	183	192	179	193	179

Hoja1 / Hoja2 / Hoja3

Construiremos una tabla agrupando los datos en intervalos de 5 cm.

Intervalos	Extremo superior	Marcas de clase	Frecuencias	
			Absolutas	Relativas
		x_i	f_i	h_i
menor o igual que 160	160		0	0,00
(160,165]	165	162,5	6	0,06
(165,170]	170	167,5	11	0,11
(170,175]	175	172,5	22	0,22
(175,180]	180	177,5	21	0,21
(180,185]	185	182,5	21	0,21
(185,190]	190	187,5	10	0,10
(190,195]	195	192,5	8	0,08
(195,200]	200	197,5	1	0,01
			100	1,00

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Funciones matriciales

Para introducir una fórmula o función matricial como FRECUENCIA tendrás que seguir estos pasos:

1. Selecciona el rango que contendrá la función.
2. Introduce la fórmula.
3. Valida la fórmula pulsando simultáneamente la combinación de teclas <Ctrl> <Mayús> <Intro>

Para ello sigue estos pasos:

- Teclea en la columna *B* los extremos superiores de los intervalos que hemos introducido en la columna *A*.
- Introduce en la celda *C18* la fórmula = *(B17 + B18)/2* para calcular la marca de clase del primer intervalo. Rellena hacia abajo en el rango *C18:C25* para completar esa columna.
- Para obtener la columna de las frecuencias absolutas selecciona el rango *D17:D25,* introduce la función *=FRECUENCIA(A2:J11;B17:B25)* y pulsa la combinación de teclas ***Ctrl + Mayús + Intro.***
- Introduce la fórmula *=D17/$D$26* en la celda E17 y rellena hacia abajo en el rango E17:E25.
- Aplica la función Autosuma a las celdas *D26* y *E26.*

Para construir una tabla con intervalos del tipo [*a*, *b*), que es más habitual en libros de Matemáticas, puedes disminuir en una unidad los extremos superiores. Nótese que las alturas se registran con aproximación de 1 cm.

Construye la tabla que aparece en el margen empleando fórmulas análogas a las que acabamos de describir.

Intervalos	Extremo superior	Frecuencias	
		Absolutas	Relativas
		f_i	h_i
menor que 159	159	0	0,00
[160,165)	164	3	0,03
[165,170)	169	13	0,13
[170,175)	174	19	0,19
[175,180)	179	20	0,20
[180,185)	184	23	0,23
[185,190)	189	11	0,11
[190,195)	194	10	0,10
[195,200)	199	1	0,01
		100	1,00

	A	B
1	Calificaciones	
2	Matemáticas	Física
3	4	3
4	5	5
5	3	1
6	8	7
7	4	3
8	6	5
9	7	6
10	4	4
11	7	6
12	4	3
13	9	8
14	3	4
15	5	3
16	6	5
17	5	4
18	8	6
19	2	1
20	9	8
21	6	4
22	4	3
23	2	1
24	5	6
25	9	7
26	6	4
27	4	3
28	6	4
29	3	4
30	7	7
31	3	2
32	4	4

Hoja1

Para obtener las frecuencias marginales de los primeros valores deberás introducir en las celdas *E3* y *E14* las fórmulas *=CONTAR.SI($A$3:$A$32;D3)* y *=CONTAR.SI($B$3:$B$32;D14)*, respectivamente. Luego deberás utilizar las opciones de Copiar y Pegado especial/Fórmulas del menú Edición para obtener las frecuencias del resto de los valores.

2. Estadística descriptiva bidimensional

Es muy frecuente estudiar fenómenos en los que se toman dos medidas para cada observación. Si denominamos X a la variable unidimensional que toman los valores de la primera observación e Y a los de la segunda, el par (X,Y) representa a la variable bidimensional del estudio.

La tabla del margen que muestra las calificaciones en Matemáticas y Física de 30 alumnos corresponde a la variable estadística bidimensional (X,Y) siendo X = *nota en Matemáticas* e Y = *nota en Física.*

Podremos obtener fácilmente las distribuciones marginales asignando a los elementos de cada variable el número de veces que se repiten.

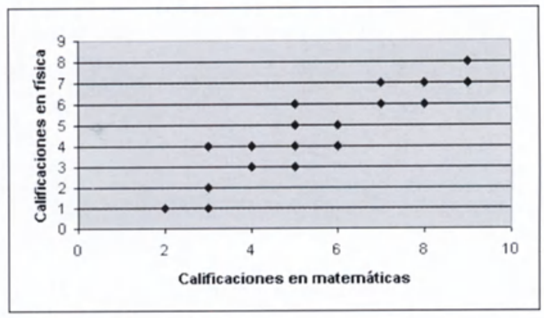
	C	D	E
1		Distribuciones marginales	
2		X=Nota en matemáticas	Frecuencia absoluta marginal
3		2	2
4		3	4
5		4	7
6		5	4
7		6	5
8		7	3
9		8	2
10		9	3
11			
12		Distribuciones marginales	
13		Y=Nota en física	Frecuencia absoluta marginal
14		1	3
15		2	1
16		3	6
17		4	8
18		5	3
19		6	4
20		7	3
21		8	2

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Diagrama de dispersión

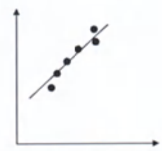
Es muy útil obtener el diagrama de dispersión para este tipo de variables. Dicho diagrama es la representación gráfica en el plano de los pares (x_i, y_i) que constituyen los valores de la variable bidimensional.

Para obtenerlo señala el rango de datos *A3:B32*, haz clic sobre el botón  y elige como tipo de gráfico *XY* (Dispersión).



3. Correlación lineal

Ya hemos visto que con la covarianza podemos intuir cómo es la relación de dos variables. Pero en Estadística se usa la teoría de correlación para identificar y cuantificar dicha relación. En este apartado nos centramos únicamente en la correlación lineal que corresponde al caso del estudio de la existencia o no de una relación lineal entre dichas variables. En el caso de que la nube de puntos esté muy próxima a una línea recta, la relación lineal se dice que es fuerte y va siendo más débil a medida que se aleja de dicha recta.



Relación lineal positiva fuerte

Relación lineal negativa fuerte

Coeficiente de correlación lineal

Para precisar el grado de aproximación de la nube de puntos a una línea recta se utiliza el *coeficiente de correlación lineal de Pearson*, cuya expresión matemática aparece en el margen.

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

Coeficiente de correlación lineal

Puedes utilizar la fórmula =*COEF.DE.CORREL(Rango de valores)* para calcularlo utilizando Excel.

Cuando $r > 0$ la relación lineal es positiva y cuando $r < 0$ es negativa.

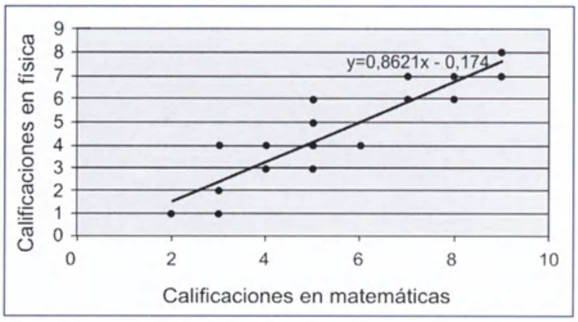
Si $r = -1$ o $r = 1$, todos los valores están en la línea recta (relación lineal total).

Si r es muy próximo a -1 o a 1, la relación lineal es fuerte.

Si $r = 0$ no hay relación lineal (las variables son independientes). A medida que r se aproxima a cero, la relación lineal va siendo más débil.

Regresión lineal

Una vez que se ha comprobado que hay una correlación fuerte en las variables X e Y de una variable estadística bidimensional y que el diagrama de puntos se agrupa en torno a una línea recta, el análisis de *regresión lineal* permite obtener la ecuación de la recta $y = mx + b$ que mejor se ajusta al diagrama de dispersión.



Obtención de la recta de regresión

La forma más sencilla de obtenerla es a partir del *diagrama de dispersión* (*nube de puntos*). En la figura del margen aparece la recta de regresión correspondiente al gráfico de dispersión de las calificaciones de Matemáticas y Física del apartado *Estadística descriptiva bidimensional*. Para obtener la recta bastaría:

1º) Hacer clic con el botón derecho del ratón sobre algún punto del diagrama.

2º) Elegir *Agregar línea de tendencia en el menú contextual.*

3º) En el cuadro de diálogo mostrado elegir *Lineal* en la ficha *Tipo* y marcar la casilla *Presentar ecuación en el gráfico* en la ficha *Opciones*.

4º) Hacer clic en el botón *Aceptar.*

También puedes obtener la ecuación lineal que mejor se ajusta a una nube de puntos mediante la función:

ESTIMACIÓN.LINEAL (y_conocidos, x_conocidos, constante, estadística)

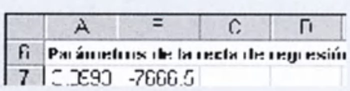
Esta función devuelve una matriz de valores que define la recta de regresión, por tanto, debe introducirse como fórmula matricial.

Si el argumento constante es FALSO, b se establece igual a 0 y los valores m se ajustan para encajar la nube de puntos a la recta $y = mx$.

Si el argumento constante es VERDADERO o se omite, se calcula el término constante b.

Si el argumento estadística es FALSO o se omite, la función ESTIMACION.LINEAL sólo devuelve los coeficientes m y la constante b.

Si el argumento estadística es VERDADERO, la función devuelve las estadísticas de regresión adicionales: errores estándar, coeficiente de determinación, grados de libertad, etc.



Parámetros de la recta de regresión obtenidos al introducir la fórmula matricial en las celdas A7 y B7.

Ejemplo:

El precio del m² de las viviendas en España ha evolucionado como se indica en la tabla siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	PRECIO MEDIO DEL M² DE LAS VIVIENDAS											
2	Unidad: Miles de pesetas											
3	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
4	**81,4**	**94,1**	**107,5**	**106,1**	**105,7**	**106,4**	**110,2**	**112,2**	**113,9**	**119,2**	**134,3**	**136,7**

Tomando como variable X el tiempo y como variable Y el precio del m², vamos a obtener los coeficientes de la recta de regresión de Y sobre X usando la función que acabamos de describir. Para ello:

1º) Resalta con el ratón dos celdas para el destino de los valores de los parámetros *m* y *b* de la recta de regresión que producirá la función. Elige *Insertar Función* y en el cuadro de diálogo *Pegar función* selecciona *Estadísticas* eligiendo en el panel derecho la función *ESTIMACIÓN.LINEAL*. Haz clic en el botón *Aceptar*.

2º) Especifica el rango de datos *A3:L3* para el argumento *x_conocidos,* el rango de datos *A4:L4* para el argumento *y_conocidos,* el argumento constante *VERDADERO* y el argumento estadística *FALSO*.

3º) Valida pulsando las teclas *Ctrl+Mayús+Intro*.

Comprueba que los valores obtenidos coinciden con los que aparecen en la recta de regresión obtenida al agregar línea de tendencia en el diagrama de dispersión.

Realizar predicciones

A partir de la recta de regresión, se pueden calcular con cierta aproximación los valores de la variable dependiente conocidos los de la independiente, sin más que sustituir estos últimos en la ecuación de la recta. Por ejemplo, podremos introducir en la celda *M4* la fórmula =*$A$7*M3+$B$7* para predecir el precio para el año 2001 y análogamente para el 2002.

	L	M	N
3	2000	2001	2002
4	**136,7**	**135,9860758**	**139,8853695**

Obtén los parámetros de la recta de regresión del ejemplo utilizando la función TENDENCIA y comprueba que coinciden con los obtenidos anteriormente

Para predecir resultados también puedes utilizar la función *TENDENCIA (y_conocidos;x_conocidos, x_nuevos, constante)*. Para ello, 1º, deberás resaltar con el ratón las celdas destino *M4* y *N4*; 2º, mediante las opciones Insertar Función elige la función *TENDENCIA;* 3º, especifica los argumentos de *x_conocidos* e *y_conocidos* como hicimos en la formula anterior; como *x_nuevos* especifica *M3:N3* y como argumento constante, el valor verdadero; 4º, valida con las teclas *Ctrl+Mayús+Intro*.

4. Idea intuitiva de probabilidad. Ley de los grandes números

Experimentalmente podemos comprobar que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un valor, cuando se realiza un número muy grande de pruebas. Precisamente a dicho valor se le llama *probabilidad* del suceso.

A1 = =ENTERO(1+6*ALEATORIO())

	A	B	C	D	E	…	X	Y
1	2	4	6	2	4		1	2
2	6	4	4	3	2		5	6
3	2	4	4	1	2		2	3
4	5	5	4	1	2		3	1
5	3	1	2	3	1		2	5
6	5	3	2	2	1		3	2
7	5	4	3	6	2		6	5
8	1	2	2	1	5		4	6
997	2	5	1	2	5		2	6
998	3	6	3	4	5		6	3
999	3	6	6	3	1		4	3
1000	4	5	4	2	4		3	6

Hoja1 / Hoja2 / Hoja3

Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado y observar el número de la cara superior. Simulemos en el ordenador dicho lanzamiento en 25, 50, 75... 25000 tiradas utilizando la función *=ENTERO(1+6*ALEATORIO())* que devuelve aleatoriamente un número entre 1 y 6. Para ello utilizaremos 25 columnas (25 tiradas por fila), especificaremos un ancho de tamaño 3 para cada una, introduciremos en la primera celda (*A1*) la fórmula *=ENTERO(1+6*ALEATORIO())*, rellenaremos hacia la derecha para rellenar la primera fila y luego hacia abajo hasta la fila 1000 para completar la fórmula en el rango *A1:Y1000.* En total habrá 25 columnas x 1000 filas = 25000 tiradas.

	B
6	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y1;1)/A6
7	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y2;1)/A7
8	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y3;1)/A8
9	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y4;1)/A9
10	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y8;1)/A10
11	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y12;1)/A11
12	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y16;1)/A12
13	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y20;1)/A13
14	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y24;1)/A14
15	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y28;1)/A15
16	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y32;1)/A16
17	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y36;1)/A17
18	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y40;1)/A18
19	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y200;1)/A19
20	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y400;1)/A20
21	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y600;1)/A21
22	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y800;1)/A22
23	=CONTAR.SI(Hoja1!$A$1:Y1000;1)/A23

Podemos realizar el recuento de las veces que sale cada número y calcular su frecuencia relativa. Para ello, deberás introducir fórmulas semejantes a las que aparecen en la figura del margen para el valor 1, introducidas en el rango *B6:B23.*

Idea Intuitiva de probabilidad. Ley de los grandes números

Tabla de frecuencias relativas

	Cara N°					
N° tiradas	1	2	3	4	5	6
25	0,160	0,120	0,160	0,240	0,200	0,120
50	0,160	0,160	0,180	0,180	0,220	0,100
75	0,133	0,187	0,173	0,160	0,200	0,147
100	0,120	0,190	0,190	0,150	0,180	0,170
200	0,160	0,145	0,170	0,185	0,205	0,135
300	0,173	0,147	0,167	0,187	0,187	0,140
400	0,168	0,155	0,165	0,198	0,180	0,135
500	0,158	0,154	0,172	0,194	0,178	0,144
600	0,160	0,155	0,180	0,183	0,175	0,147
700	0,161	0,159	0,173	0,177	0,173	0,157
800	0,155	0,155	0,178	0,180	0,173	0,160
900	0,154	0,157	0,172	0,181	0,172	0,163
1000	0,154	0,156	0,172	0,187	0,165	0,166
5000	0,154	0,159	0,176	0,172	0,169	0,170
10000	0,156	0,162	0,171	0,170	0,170	0,172
15000	0,161	0,167	0,167	0,168	0,168	0,169
20000	0,164	0,167	0,168	0,169	0,167	0,165
25000	0,164	0,167	0,168	0,168	0,166	0,167

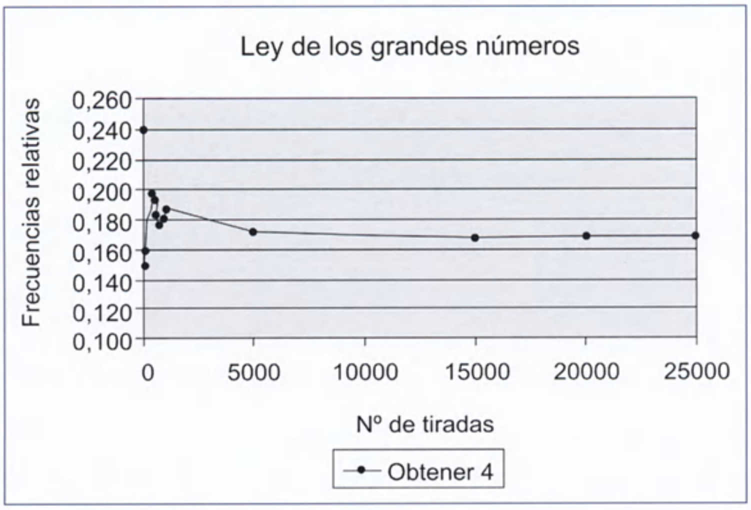
Hoja1 / Hoja2 / Hoja3

Puedes activar el cálculo manual para evitar que el contenido de la hoja cambie continuamente mientras realizas el diseño. Para ello, marca la casilla *Manual* de la ficha *Calcular* del cuadro de diálogo opciones obtenido al seleccionar *Herramientas Opciones.* Cuando termines, pulsa *F9* para calcular toda la hoja.

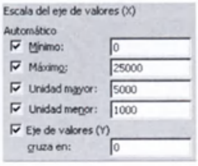
Observa que, para un número muy grande de tiradas, la frecuencia relativa obtenida se estabiliza entorno al valor 0,16. Si aumentáramos muchísimo más el número de tiradas, dicha frecuencia se estabilizaría en torno al número 0,166...6 (probabilidad de obtener un determinado número al lanzar un dato).

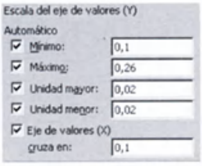
Gráfico

Si creas un gráfico *XY* (Dispersión) observarás visualmente cómo la frecuencia relativa se va estabilizando en torno a un valor, a medida que aumenta el número de tiradas. Para el gráfico de la figura hemos utilizado el rango *E6:E23* para la serie de valores *Y* y el rango *A6:A23* para la serie de valores *X*.



Para que aparezca la graduación de los ejes como en la figura, utiliza los siguientes valores en la ficha *Escala* del cuadro de diálogo *Formato de ejes*.





Para obtener el cuadro de diálogo *Formato de ejes*, haz clic con el botón derecho del ratón sobre el eje y selecciona en el menú contextual *Formato de ejes*.

Diseña una hoja para simular el lanzamiento de una moneda. Emplea los lanzamientos que sean necesarios hasta observar que las frecuencias relativas de los sucesos salir cara y salir cruz se estabilizan en torno al valor de 0,5. Puedes utilizar la función *=SI(ALEATORIO()<0,5; "CARA";"CRUZ")*. Con la función *=CONTAR.SI (Rango;"CARA")* contarás el número de caras en un rango determinado y con la función *=CONTAR.SI(Rango; "CRUZ"),* el número de cruces. Dividiendo el número de caras o cruces por el número de lanzamientos obtendrás las frecuencias relativas.

5. Variables aleatorias discretas

Una variable discreta no es más que una aplicación que asocia un número real a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

La variable aleatoria se dice que es discreta cuando sólo puede tomar un conjunto finito o infinito numerable de valores.

Por ejemplo, si lanzamos un par de dados y observamos los números que aparecen (se obtendrán 36 posibles parejas de resultados: (1,1);(1,2)......(6,6)) podríamos considerar la variable aleatoria que asigna a cada resultado la suma de puntos obtenidos:

$\{(1,1)\} \rightarrow 2 \quad \{(1,2),(2,1)\} \rightarrow 3 \quad \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \rightarrow 4$

....

$\{(6,6)\} \rightarrow 12$

En el ejemplo anterior, llamando X a la variable aleatoria tendríamos:

$$f(2) = P(X = 2) = 1/36$$
$$f(3) = P(X = 3) = 2/36$$
$$f(4) = P(X = 4) = 3/36$$
$$....$$
$$f(12) = P(X = 12) = 1/36$$

Función de probabilidad

Es la función que hace corresponder a cada valor de la variable su probabilidad.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i=f(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

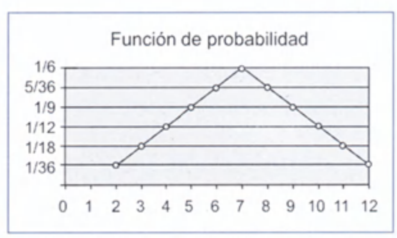
Representación gráfica

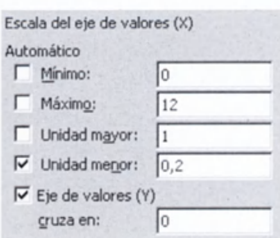
Podemos introducir los datos en una hoja de cálculo:

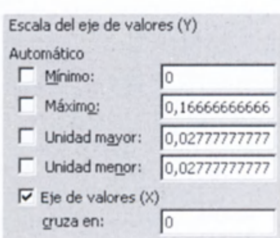
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	$f(x_i)$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Para ello debes tener la precaución de especificar en el rango de valores de la variable, *B2:L2,* un formato numérico de fracción de hasta dos dígitos. Observa que Excel simplifica los resultados.

Con dichos datos podremos crear un gráfico *XY* (Dispersión) para representar la variable.







En la ficha *Escala* del cuadro de diálogo *Formato de ejes* utiliza los valores mostrados en la figura.

Función de distribución

Es la función que asocia a cada valor de la variable la probabilidad acumulada hasta dicho valor.

Obtendremos la función de distribución del ejemplo anterior en la fila 3:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
3	$F(x_i)$	1/36	1/12	1/6	5/18	5/12	7/12	13/18	5/6	11/12	35/36	1

Calcula el valor $F(2)$ en la celda *B3* introduciendo la fórmula *=SUMA($B2:B2).* Rellena hacia la derecha el rango *B2:L2* para obtener las demás.

Parámetros de una variable aleatoria discreta

Podrás introducir fácilmente las fórmulas de la siguiente tabla en un libro para el cálculo de los parámetros de la variable. En la figura del margen te ofrecemos una buena forma de organizar los datos para el cálculo de parámetros de la variable del ejemplo anterior.

	A	B	C	D
1	x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	$x_i^2 \cdot p_i$
2	2	1/36	1/18	1/9
3	3	1/18	1/6	1/2
4	4	1/12	1/3	1 1/3
5	5	1/9	5/9	2 7/9
6	6	5/36	5/6	5
7	7	1/6	1 1/6	8 1/6
8	8	5/36	1 1/9	8 8/9
9	9	1/9	1	9
10	10	1/12	5/6	8 1/3
11	11	1/18	11/18	6 13/18
12	12	1/36	1/3	4

Media o esperanza matemática	$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$
Varianza	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_i - \bar{x}^2$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_i - \bar{x}^2}$

6. Distribución de probabilidad binomial

La función *DISTR.BINOM(núm_éxitos;ensayos; prob_éxito;acumulado)* devuelve la probabilidad de los valores que puede tomar la variable que expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento, o bien la función de distribución acumulada.

Núm_éxitos es el número de éxitos en las pruebas.

Ensayos es el número de pruebas independientes.

Prob_éxito es la probabilidad de éxito en cada prueba.

Acumulado es un valor lógico que, si toma el valor *FALSO,* la función calcula $P(X{=}k)$; y si el *VERDADERO,* calcula la función de distribución acumulada $P(X \leq k)$.

Un experimento aleatorio caracterizado por realizarse pruebas repetidas e independientes con sólo dos posibles resultados, favorable o éxito y desfavorable o fracaso, sigue el modelo de distribución *binomial.* Llamando p a la probabilidad de éxito y q a la de fracaso ($q = 1 - p$), la probabilidad de k éxitos en n pruebas repetidas viene dada por la fórmula:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

donde $\binom{n}{k}$ es *COMBINAT(n;k)*

Ejemplo:

Consideremos la variable X que expresa el número de caras obtenidas en 10 lanzamientos de una moneda.

Se pide:

a) La probabilidad de obtener exactamente 6 caras.
b) La probabilidad de sacar a lo sumo 3 caras.
c) La probabilidad de no obtener ninguna cara.
d) La probabilidad de obtener por lo menos una cara.

	A	B	C	D
1	Distribución binomial			
2			p	acumulado
3	k	n	0,5	
4	0	10	0,00097656	FALSO
5	1	10	0,00976563	FALSO
6	2	10	0,04394531	FALSO
7	3	10	0,1171875	FALSO
8	4	10	0,20507813	FALSO
9	5	10	0,24609375	FALSO
10	6	10	0,20507813	FALSO
11	7	10	0,1171875	FALSO
12	8	10	0,04394531	FALSO
13	9	10	0,00976563	FALSO
14	10	10	0,00097656	FALSO

Podemos diseñar una hoja similar a la mostrada en la imagen del margen para obtener inicialmente las probabilidades de obtener 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 caras.

La fórmula de la probabilidad se introducirá en la celda *C4: =DISTR.BINOM(A4;B4;$C$3; D4)*. Luego habrá que rellenar hacia abajo en el rango *C4:D14* para obtener todas las probabilidades.

Respuestas del ejemplo:

a) P(6 caras) =0,20507813. Es el resultado de la celda C10.

b) Se puede hacer de dos formas:

	A	B	C	D
2			p	acumulado
3	k	n	0,5	
7	3	10	0,171875	VERDADERO

- Sumar P (0 caras) + P (1 cara) + P (2 caras) + P (3 caras) = 0,171875 introduciendo en una celda vacía la fórmula *=SUMA(C4:C7)*
- Cambiar el argumento de la celda *D7* por el valor *VERDADERO* para calcular $P(X \leq 3)$.

c) P (0 caras) = 0,0097656. Es el resultado de la celda *C4*.

d) $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 1 - P(X = 0) = 1 -$ 0,00097565 = 0,99902344. Dicha probabilidad se calculará fácilmente introduciendo en una celda vacía la fórmula: =1 – *C4.*

La *función de densidad* de una variable aleatoria continua que sigue una distribución normal de media m y desviación típica σ tiene la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

7. Distribución de probabilidad normal

La función *DISTR.NORM(x;media;desv_típica;acumulado)* devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación típica especificadas, o bien el valor que toma la función de densidad para un valor concreto de la variable *X*.

- *x* es el valor cuya distribución se desea obtener.
- *Media* es la media aritmética de la distribución.
- *Desv_típica* es la desviación típica de la distribución.

- *Acumulado* es un valor lógico que, si toma el valor *VERDADERO,* la función calcula $P\,(X \leq x)$ y si el *FALSO,* devuelve el valor de la función de densidad para dicho valor de la variable.

Probabilidad asociada a un intervalo

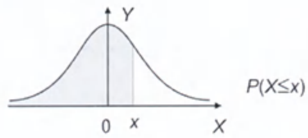
En problemas de distribuciones de probabilidad normal es corriente el cálculo de probabilidades de los siguientes intervalos:

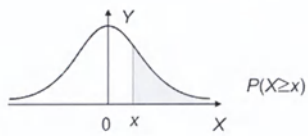
$P\,(X \leq x)$, que se ha visto en el apartado anterior.

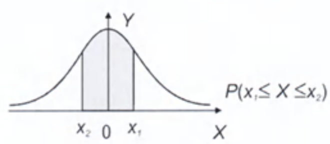
$P\,(X \varnothing x) = 1 - P\,(X \leq x)$. Por tanto utilizaremos la siguiente fórmula de *Excel:* = 1 – *DISTR.NORM (x;m;s;acumulado).*

$P\,(x_1 \leq X \leq x_2) = P\,(X \leq x_2) - P\,(X \leq x_1)$. Usaremos la fórmula: = DISTR.NORM *(x_2;m; s;acumulado)-DISTR.NORM(x_1;m;s;acumulado).*

Creación de una hoja de cálculo para obtener *f* (*x*) y el gráfico







1) Introducimos los valores de los parámetros μ y σ así como el valor del argumento Acumulado en las celdas *B2*, *B3* y *B4* respectivamente.

2) Como en $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ está casi todo el área de la curva (0,9974) obtendremos dicho intervalo con 50 subdivisiones. Emplea estas fórmulas:

   Extremo inferior del intervalo: *=$B$2 – 3*$B$3.* Celda *F2.*

   Tamaño del intervalo: *=($B$2 + 3*$B$3) – ($B$2 – 3*$B$3).* Celda *F3.*

   Longitud marcas de graduación: = *$F$3/50.* Celda *F4.*

3) Obtención de los valores de la serie *x*:

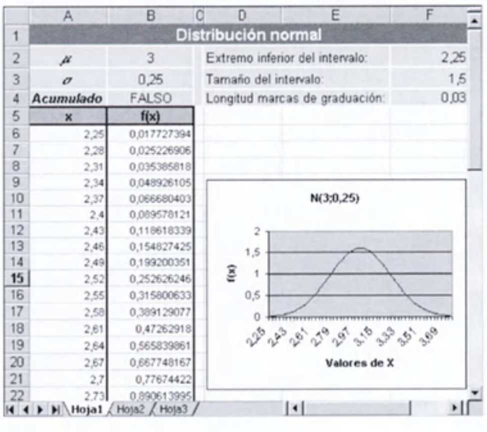
   Primer valor de *x*: =$F$2

   Resto de los valores: rellenamos serie en el rango *A6:A56* con incremento de 0,03 (longitud marca de graduación del eje *X*).

4) Obtención de los valores de la serie *f* (*x*):

   Primer valor de *f* (*x*): = *DISTR.NORM (A7;$B$2;$B$3;$B$4).*

   Resto de los valores: arrastra el controlador de relleno hasta rellenar el rango *B6:B56.*



ELABORACIÓN DE UNA EXPOSICIÓN COMO ELEMENTO MOTIVADOR PARA EL TRABAJO EN MATEMÁTICAS

Jesús García Gual, Antonio Hernández Hernández, Jesús Hernando Pérez, Francisco Martín Casalderrey y Cristina Torcal Baz

Seminario de elaboración de materiales didácticos para la clase de Matemáticas. CAP Madrid Centro

INTRODUCCIÓN

¿Cómo empezó todo esto? En el CAP Madrid Centro tuvo lugar en el año académico 2000-01 un curso sobre elaboración de materiales de Matemáticas para el aula. Con algunos de los asistentes a ese curso, se ha constituido este año un Seminario de ámbito territorial Madrid Capital, cuyo objetivo es la elaboración de material didáctico para la clase de Matemáticas.

Por otra parte, el 12 de mayo ha sido declarado *Día Escolar de las Matemáticas* por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y desde hace tres años se elige un tema monográfico sobre el que se centran las celebraciones de ese día. El tema para este año es *Gulliver y las Matemáticas: lo grande y lo pequeño.*

Contamos además con la experiencia previa de elaboración de materiales en forma de exposición de algunos de los miembros del Seminario, lo que nos llevó a encaminar la actividad en esa dirección. El título finalmente elegido para nuestro trabajo es *Matemáticas: del átomo a las galaxias*. El diseño de la exposición pretende hacer un recorrido que vaya desde lo más pequeño hasta lo más grande, mostrando que hay Matemáticas en todas partes.

También creemos que la elaboración de una exposición puede ser un elemento motivador para el trabajo anual de un Departamento Didáctico de Matemáticas. La elección de un tema *fronterizo,* es decir, que permita incursiones desde las Matemáticas en otros ámbitos de conocimientos, facilita la interdisciplinariedad y la incardinación cultural de los aprendizajes matemáticos.

Nuestra exposición, de unos veinte paneles, recorre las zonas fronterizas con otras ciencias, la Astronomía, la Física, la Biología, y con otros ámbitos del conocimiento como la Literatura, el Arte o la Técnica. Buscamos que el recorrido sea largo y pararnos en los meandros. Pretendemos que nuestros alumnos sitúen en distintos contextos sus conocimientos matemáticos y que descubran otros nuevos. Sugerir, intuir, despertar ideas, en lugar de sólo mostrarlas. La exposición, acompañada de un CD-ROM con recursos para poder explotarla en el contexto de las clases de Matemáticas de la ESO, recorrerá los centros que la soliciten.

En esta comunicación narraremos aspectos metodológicos de la elaboración, la elección de objetivos y contenidos, el uso auxiliar de las Tecnologías de la Información para la búsqueda y el tratamiento de imágenes; y también aspectos técnicos y artísticos: el diseño base del cartel, la elección de materiales adecuados. Describiremos, por tanto, las decisiones que se han tomado a lo largo del proceso, para dar ideas y animar a otras personas a hacer cosas parecidas.

FINALIDADES

- Elaborar una exposición de Matemáticas en torno a un tema.
- Analizar y mostrar los medios tecnológicos para llevarla a cabo.
- Desarrollar una metodología para la elaboración de estos materiales didácticos que pueda servir de hilo conductor para el trabajo en los Departamentos de Matemáticas.
- Generar y elaborar material didáctico complementario aprovechable en el desarrollo del currículo.
- Crear un material de préstamo gratuito desde el CAP, fácilmente transportable a centros educativos u otras entidades culturales para su exposición y visita.

PROCESO

Podemos esquematizarlo en las siguientes fases:

Elección de un hilo conductor

En nuestro caso lo ha sido el tema elegido por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas para el Día Escolar de las Matemáticas, *Gulliver y las Matemáticas: lo grande y lo pequeño*, que nosotros hemos particularizado en el título de la exposición *Matemáticas: del átomo a las galaxias*.

Selección de temas y posibles contenidos

Nuestra unidad básica de trabajo, por llamarla de alguna manera, es el cartel. Cada cartel contiene:

- *Una idea básica*, tomada normalmente de un ámbito no necesariamente matemático.
- *Un desarrollo matemático*, conectado con la idea básica.
- *Un apunte histórico*, la referencia a un personaje o a un hecho de la historia de las Matemáticas.

Los carteles son, sobre todo, imágenes; el texto es un elemento auxiliar que completa la imágenes.

Se eligieron, inicialmente, los siguientes temas:

1) El átomo. Estructura de la materia.
2) La molécula. Las proteínas. ADN: hélice, códigos cuaternarios, codificación.
3) Virus y células. Glóbulo blanco infectado de SIDA VIH: proporciones y tamaños, volúmenes, crecimientos exponenciales, geometría (poliedros).
4) Cristales. Minerales: geometría, cubo (pirita), dodecaedros, octaedros.
5) La Naturaleza. Tejidos y soluciones a problemas constructivos. Panal, alas de insectos, mosaicos, espirales.
6) La Naturaleza. Simetrías: Vincapervinca, cactus.
7) La Tecnología, de la rueda al microchip. Válvula. Transistor. Microprocesador. Analógico y digital: Matemática de 0 y 1 (sistemas binarios).
8) La letra escrita. Lo Grande y lo Pequeño en la Literatura: diseño de la letra, textos representativos que se refieran a lo grande y lo pequeño (Gulliver, el increíble hombre menguante, Alicia,...).
9) El hombre y la medida. Medidas antropomorfas. El metro. Aquiles y la tortuga: codos, pies, pulgadas. Sucesiones y series.
10) El hombre y la sociedad. Las poblaciones: paso de lo discreto a lo continuo, estadística y probabilidad, integral definida.
11) La arquitectura. Arcos. Formas y curvas: función, derivada, integral definida. 12. Mapas: escalas.
12) La superficie de la Tierra. Costas e islas: caos y fractales. Sucesiones.
13) La Tierra y los Planetas. El día: volúmenes de revolución, esfera y elipsoide, ejes de giro y simetrías, masa y densidad, periodos de revolución, el tiempo.
14) El Sistema Solar. Cometas y Planetas: cónicas.
15) Las Galaxias y el Universo: elipses, espirales, geodésicas, curvatura.

Elección del soporte material

Los carteles constan de tres elementos. El básico, en blanco y negro por las limitaciones del plotter del que disponemos, es *una hoja de papel de tamaño DIN A1* (84 cm × 60 cm). Sobre ella se imprimen con el plotter los textos, dejando en blanco los espacios adecuados para las imágenes. La hoja se adhiere con pegamento en spray sobre un *soporte de cartón pluma blanco de 5 mm de espesor*. Las *imágenes en color* se hacen con una impresora de inyección de tinta, sobre papel de calidad fotográfica y se montan sobre soportes de cartón pluma de 5 mm de grosor. Finalmente, las imágenes ocupan su lugar sobre el cartel, usando el mismo adhesivo que para pegar la hoja sobre el soporte. Los carteles así elaborados se barnizan para protegerlos y darles rigidez y consistencia. Para colgarlos, tras varios intentos fallidos, hemos optado por pinzas de papelería, de las que se usan para mantener juntas las hojas de un documento de un cierto grosor.

El formato de los carteles

Decidimos que la exposición tuviera un logotipo que la identificara. El logo sirve al mismo tiempo para dar una cierta unidad visual a los carteles. Como logo elegimos un grabado de una de las ediciones de los viajes de Gulliver, en el que aparece haciendo de coloso mientras los liliputienses desfilan bajo sus piernas.

La hoja básica de cada cartel, sobre la que se escribe el texto dejando los huecos para las imágenes, se compone usando Word. Para darles un estilo común diseñamos una *plantilla.* En la plantilla, además del logo se incluye el título de la exposición, que diseñamos usando el módulo Word Art. El espacio para el título y el subtítulo de cada panel y el tipo de letra para ambos, así como para el resto de los textos quedó fijado también en esta plantilla. El texto se teclea en Arial 10 en un formato de hoja DIN A4. Al imprimir la hoja en DIN A1 se aplica un factor de conversión del 283% por lo que la letra se convierte en 28, aproximadamente, que es perfecta para la lectura a cierta distancia.

Las imágenes

La búsqueda de las imágenes es siempre un tema difícil. Algunas provienen de libros, otras son de producción propia. Internet, naturalmente, es una buena fuente para encontrar imágenes para casi todo.

Las imágenes, no obstante, hay que tratarlas. Hay que corregir el encuadre, modificar el tamaño, corregir el contraste y el color, suprimir objetos innecesarios, hacer retoques, insertar texto. Para ello usamos dos programas fundamentalmente, *Photo Express* y *Photo Draw.*

La impresión se hace por separado y en papel de calidad fotográfica y, como se ha indicado, se montan sobre cartón pluma y se pegan sobre el resto del panel, adquiriendo así un cierto relieve.

Material didáctico complementario

La exposición vendrá acompañada de un CD-ROM. En él se incluirá:

1) *Los carteles de la exposición* en tamaño DIN A4 que pueden ser impresos con una impresora normal.
2) *Guía de visita de la exposición para alumnos.* Se trata de un cuestionario que el estudiante contestará mientras recorre la exposición. Son cuestiones curiosas, inmediatas o no, pero que no precisan, en general, de cálculos exagerados ni consultas a material curricular. Quizás en algunos casos puede ser de utilidad una enciclopedia.
3) *Cuaderno de actividades para el aula.* Colección de cuestiones en torno a los temas de los paneles, en mayor número y de mayor envergadura. Los alumnos, en pequeños grupos, la completan como trabajo de aula una vez visitada la exposición y con el material sobre la misma disponible.
4) Guía del profesor. Material complementario del anterior, en el que se proporcionarían soluciones y orientaciones didácticas.
5) Probablemente, página WEB (html) y presentación en Power Point (ppt).

VALORACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Lo que empezó siendo un proyecto lejano en el tiempo, se convirtió poco a poco en algo concreto, tangible. Una vez establecida la idea básica de la exposición, tuvo lugar la recogida de información y la búsqueda de imágenes. Esta parte del trabajo fue grata y constructiva, pero no tanto por el hecho de contrastar la información con los compañeros, en un ambiente relajado y muy enriquecedor, sino desde el punto de vista personal y profesional. Siempre se aprende algo del trabajo en equipo, y más cuando se intenta que las cosas salgan lo mejor posible, poniendo todo el esfuerzo y la ilusión. Queda claro, pues, que ha sido un placer trabajar en un grupo donde se respira y se vive el mundo de las Matemáticas de una forma especial.

El otro gran elemento motivador para la elaboración de la exposición ha sido, evidentemente, acercar el mundo de las Matemáticas a niños y mayores de una forma agradable, a través de su presencia en todos los campos del saber. Confiamos en que servirá para aclarar las ideas de muchos y despertar el interés de todos. Ese ha sido desde el principio nuestro objetivo principal.

BIBLIOGRAFÍA

Las referencias bibliográficas de la elaboración de cada panel se incluirán junto con la guía del profesor en el mencionado CD que se pretende editar.

Comunidad de Madrid

CONSEJERIA DE EDUCACION

Dirección General de Ordenación Académica